Capítulo 10

Teoremas Integrales.

Este capítulo final contiene los teoremas integrales del análisis vectorial, de amplia aplicación a la física y a la ingeniería. Los anteriores capítulos han preparado el terreno para sembrar estos teoremas. Gran parte del trabajo ya fue realizado y lo único que falta es poner las piezas juntas. Resolvemos interesantes ejercicios de los teoremas de Green, Stokes y Gauss.

SECCIÓN 1.

Teorema de Green.

Esta primera sección nos presenta el teorema de Green con algunas de sus aplicaciones. En general no hay dificultades mayores ya que las integrales son curvilíneas y dobles, conceptos que ya hemos practicado en detalle en los capítulos 7 y 8.

CONTENIDOS

Problemas.

(1) Calcular la circulación de

$$F(x, y) = (x^2 + y^2,\ 3xy + ln(y^2 + 1))$$

a lo largo de la frontera de la región definida por

$$4x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$$

recorrida en sentido positivo.

Solución.

Comenzamos por dibujar la región y su curva frontera positivamente orientada. El cálculo directo de la integral de línea es difícil, pero aplicando el **teorema de Green** tenemos

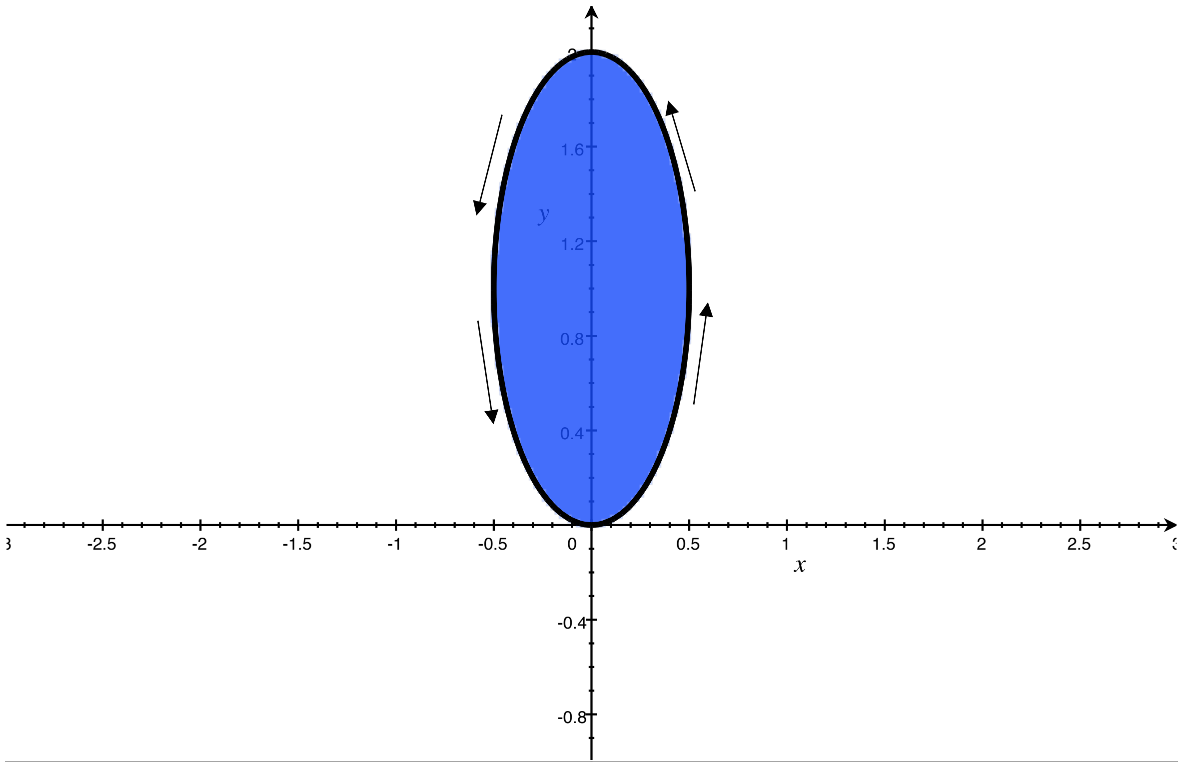
$$\oint_{C^+} F \cdot ds = \iint_R Q'_x - P'_y \ dx\ dy.$$

donde R es la región azul de la figura siguiente.

Calculando tenemos

$$Q'_x = 3y \qquad y \qquad P'_y = 2y.$$

Luego debemos calcular la integral



$$\iint_R y\ dx\ dy\,.$$

Para hallar esta integral introducimos el cambio de coordenadas

$$x = \frac{1}{2} r\ cos(\theta), \qquad y = 1 + r\ sen(\theta).$$

El Jacobiano de esta transformación es $|J| = \dfrac{r}{2}$.

Con esto nuestra integral doble se transforma en

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + r\ sen(\theta))\,.\frac{r}{2}\ dr\ d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Luego, la respuesta el ejercicio es

$$\oint_{C^+} F \cdot ds = \frac{\pi}{2}.$$

Se puede ver la solución on-line clickeando **aquí**.

(2) Calcular el área de la región $D \subset R^2$ definida por $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$ con $a, b > 0$ usando una integral de línea.

Solución.

La igualdad del **teorema de Green** nos dice que

$$\oint_{C^+} F \cdot ds = \iint_R Q'_x - P'_y \; dx \; dy.$$

Si conseguimos un campo $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ tal que

$$Q'_x - P'_y = 1$$

entonces la integral doble del teorema de Green nos da el área de R.

Hay muchos campos con tal propiedad, por ejemplo

$$F(x, y) = (0,x)$$

satisface $Q'_x - P'_y = 1$.

Por esto

$$\oint_{C^+} (0,x) \cdot ds = \iint_R 1 \; dx \; dy \; = A(R).$$

Podemos parametrizar C^+ en la forma

$$c(t) = (a \; cos(t), \; b \; sen(t)), \qquad t \in [0,2\pi].$$

Luego

$$\oint_{C^+} (0,x) \cdot ds = \int_0^{2\pi} (0, \; a \; cos(t)) \cdot (-a \; sen(t), \; b \; cos(t)) \; dt =$$

$$\int_0^{2\pi} ab \; cos^2(t) \; dt = ab \int_0^{2\pi} cos^2(t) \; dt = \pi ab \, .$$

Por lo tanto, el área del interior de nuestra **elipse** es

$$A(R) = \pi ab.$$

Se puede ver la solución on-line clickeando **aquí**.

(3) Sea $F : R^2 - \{(0,0)\} \to R^2$ tal que

$F(x, y) = ((P(x, y), Q(x, y))$. Si $F \in C^1$ y además $(Q'_x - P'_y)(x, y) = 4$ en su dominio, calcular $\oint_{C^+} F \cdot ds$ siendo C una circunferencia con centro en el origen y radio r sabiendo que para $r = 1$ el valor de dicha integral es 3π.

Solución.

El dominio de definición de F no es simplemente conexo, luego no podemos deducir que una integral de línea a lo largo de cualquier curva cerrada sea 0.

Apliquemos el **teorema de Green** para regiones múltiplemente conexas.

Consideremos una circunferencia de radio $r > 1$. Sea R la región comprendida entre la circunferencia de radio r con centro en el origen y la circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Orientemos el borde de R como se muestra en el gráfico.

Entonces, aplicando el teorema de Green para regiones múltiplemente conexas tenemos

$$\oint_{C_r} F\cdot\ ds + \oint_{C_1} F\cdot\ ds = \iint_R Q'_x - P'_y\ dx\ dy =$$

$$\iint_R Q'_x - P'_y\ dx\ dy = \iint_R 4\ dx\ dy = 4.A(R)$$

Ahora bien, el área de R es $\pi\,.\,r^2 - \pi = \pi(r^2 - 1)$.

Entonces

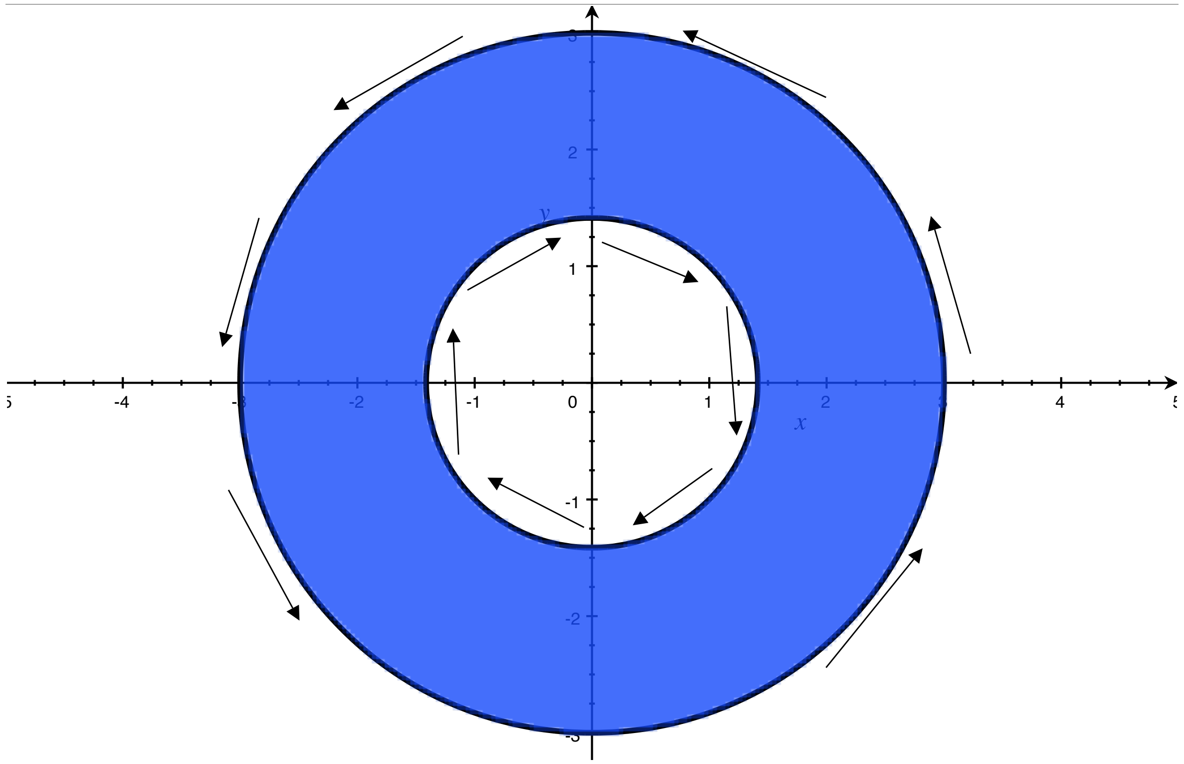
$$\oint_{C_r} F\cdot\ ds + \oint_{C_1} F\cdot\ ds = 4\pi(r^2 - 1).$$

Pero sabemos que la segunda integral es igual a 3π, entonces

$$\oint_{C_r} F\cdot\ ds - 3\pi = 4\pi(r^2 - 1),$$

luego obtenemos que para $r > 1$

$$\oint_{C_r} F\cdot\ ds = 4\pi r^2 - \pi.$$



Dejamos como ejercicio análogo el caso $r < 1$ recomendando especial cuidado al sentido de las circunferencias.

Se puede ver la solución on-line clickeando aquí.

SECCIÓN 2.

Teorema de Stokes.

CONTENIDOS

En esta sección trabajamos con el teorema de Stokes que generaliza al de Green cambiando una integral de línea en el plano por una en el espacio y sustituyendo la integral doble por una integral de superficie. Por eso relaciona los capítulos 7 y 9.

El tema de la orientación es un poco más difícil que en el teorema de Green y además la integral de superficie es en general más difícil que la integral doble.

Hemos decidido que esta sección se aprovecha mejor si se intenta hacer los ejercicios y luego se verifican con la completa solución on-line que brindamos de cada uno. El tema de las orientaciones de los elementos involucrados (curvas y superficies) es fundamental.

Problemas.

(1) Dado el campo F con matriz Jacobiana

$$D(F(x,y,z)) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \end{pmatrix},$$

calcular la circulación de F a lo largo de la curva intersección del plano $x+y+z=4$ con los planos coordenados, indicando en un gráfico el sentido de orientación de la curva.

Solución.

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(2) Calcular la circulación de un campo F cuyo rotor es

$$\nabla \times F = (x - y,\ y - x,\ z)$$

a lo largo de la curva parametrizada por

$$g(t) = (3\ cos(t),\ 3\ sen(t),\ 6 - 3\ cos(t) - \ 3sen(t)), \quad t \in [0,2\pi]\ .$$

Solución.

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(3) Sea $F(x, y, z) = (P(x, y, z),\ Q(x, y, z,)\ 2)$ un campo vectorial C^2 en la región $R \subset R^3$ descripta por $x^2 + y^2 + z^2 < 9$. Suponiendo que $\nabla \times F = \overrightarrow{0}$ en R, calcular la circulación de F a lo largo de la curva

$$\sigma(t) = (sen(t),\ 1,\ cos(t)), \qquad t \in [0,\pi].$$

Solución.

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

SECCIÓN 3.

Teorema de Gauss.

CONTENIDOS

En esta última sección trabajamos con el teorema de Gauss o teorema de la divergencia. Este teorema relaciona una integral de superficie con una integral triple. Por eso conecta los capítulos 8 y 9 de la misma manera que el teorema de Stokes relaciona los capítulos 8 y 9.

Problemas.

(1) Calcular, usando el teorema de Gauss, el flujo del campo $F(x,y,z)=(xy,\ yz,\ xz)$ a través de la superficie frontera del paralelepípedo $V=\ [0,1]\times[0,2]\times[0,3]$.

Solución.

Sea S la superficie borde del volumen V. Sea $\overrightarrow{n}$ un vector normal que apunta hacia afuera de V. Sea

$$Div(F)=P'_x+Q'_y+R'_z=y+z+x$$

la divergencia del campo vectorial F.

Entonces, el **teorema de Gauss** nos permite escribir

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}\ dS=\iiint_V Div(F)\ dV=$$

$$\iiint_V x+y+z\ dx\ dy\ dz.$$

Calculemos para empezar

$$\iiint_V x\ dx\ dy\ dz=\int_0^1\int_0^2\int_0^3 x\ dz\ dy\ dx=\int_0^1\int_0^2 3x\ dy\ dx=$$

$$\int_0^1 6x\ dx=3.$$

Se ve que análogamente

$$\iiint_V y\ dx\ dy\ dz=6 \qquad \text{y} \qquad \iiint_V z\ dx\ dy\ dz=9.$$

Por lo tanto

$$\iint_S F\cdot\overrightarrow{n}\ dS=\iiint_V Div(F)\ dV=3+6+9=18.$$

(2) Demostrar que el flujo de

$$F(x,y,z)=(x+ye^z,\ Q(x,z),\ 5z)$$

a través del trozo de esfera de ecuación

$$x^2+y^2+z^2=13, \qquad z\geq 2$$

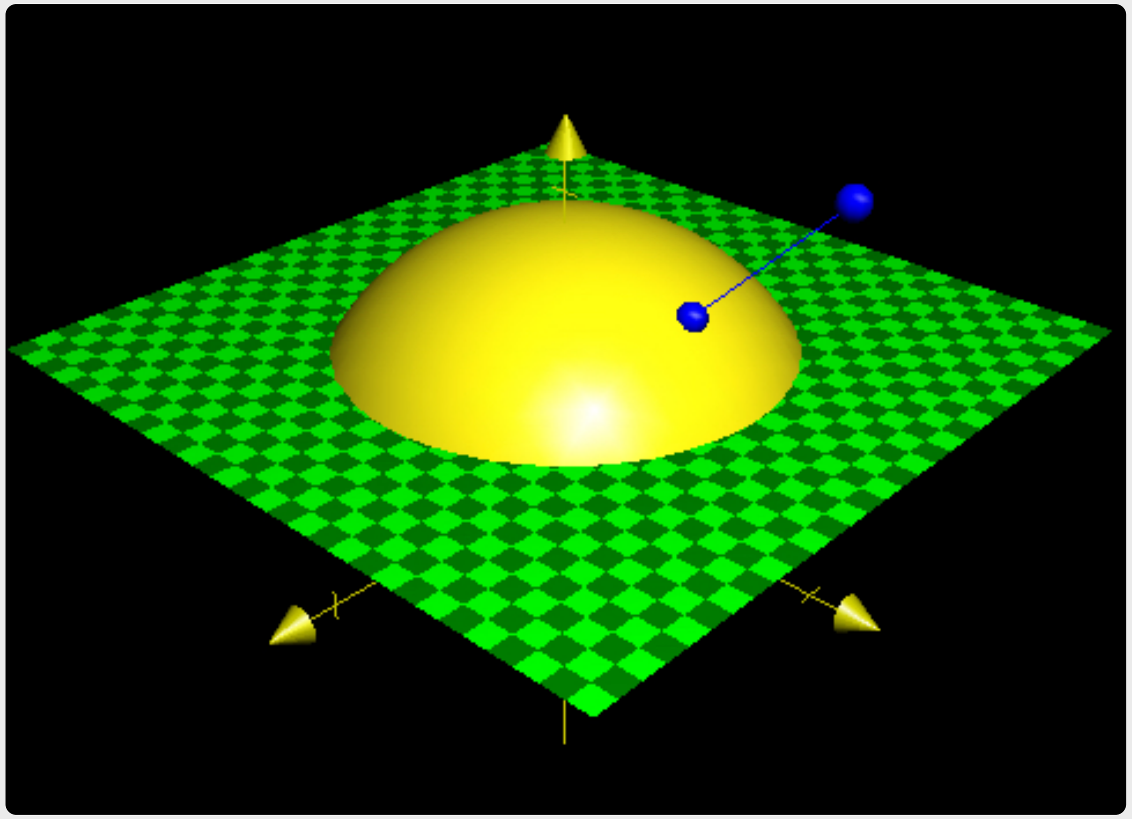
no depende de la función Q.

Indicar en un gráfico la orientación elegida para el vector normal a la superficie.

Solución.

Para poder aplicar el **teorema de Gauss** precisamos una superficie cerrada. Luego agregamos a la parte de la esfera del ejercicio la tapa circular plana a altura $z = 2$ de radio 3. Llamemos a esta tapa T y sea el trozo de nuestra esfera S.

GALLERY 10.1 Ejemplo del teorema de Gauss



La normal va hacia afuera. En la esfera amarilla apunta “hacia arriba” y en el plano verde “hacia abajo”.

Entonces, aplicando el **teorema de Gauss**

$$\iint_{S \cup T} F \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iiint_V Div(F)\ dV = \iiint_V 1 + 0 + 5\ dV.$$

Por lo tanto

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{n}\ dS + \iint_T F \cdot \overrightarrow{n}\ dS = 6.Vol(V).$$

Calculemos ahora $\displaystyle\iint_T F \cdot \overrightarrow{n}\ dS$.

La tapa T se puede parametrizar en la forma

$$\varphi(x, y) = (x,\ y,\ 2), \qquad (x, y) \in D$$

donde

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Calculando tenemos

$$\varphi'_x = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\varphi'_y = (0,\ 1,\ 0)$$

entonces

$$\overrightarrow{n} = \varphi'_x \times \varphi'_y = (0,\ 0,\ 1).$$

Pero esta normal no apunta al exterior del volumen luego debemos tomar como normal

$$\overrightarrow{n} = (0,\ 0,\ -1).$$

Con esto

$$\iint_T F \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint_T -5z\ dS = \iint_T -10\ dS =$$

$$-10.A(T) = -10.\pi.3^2 = -90\pi.$$

Luego tenemos hasta ahora

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{n}\ dS = 6.Vol(V) + 90\pi.$$

Esto completa la prueba de que el flujo de F a través de S no depende de la función Q. Pero si queremos hallar el valor debemos calcular todavía $Vol(V)$.

Es posible calcular $Vol(V)$ en coordenadas cilíndricas. En efecto,

$$Vol(V) = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_2^{\sqrt{13-r^2}} r\ dz\ dr\ d\theta =$$

$$2\pi\int_0^3 r\sqrt{13-r^2} - 2r\ dr = 2\pi\,.\frac{13^{3/2}-35}{3}.$$

Sustituyendo este valor en $Vol(V)$ obtenemos el resultado final

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{n}\ dS = 6.2\pi\,.\frac{13^{3/2}-35}{3} + 90\pi.$$

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(3) Calcular el flujo de F a través de la semiesfera de ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ sabiendo que existe un campo $G \in C^2(R^3)$ tal que $F = Rot(G)$ y que $F(x, y, 0) = (0, y, x-1)$. Indicar en un gráfico la orientación elegida para $\overrightarrow{n}$.

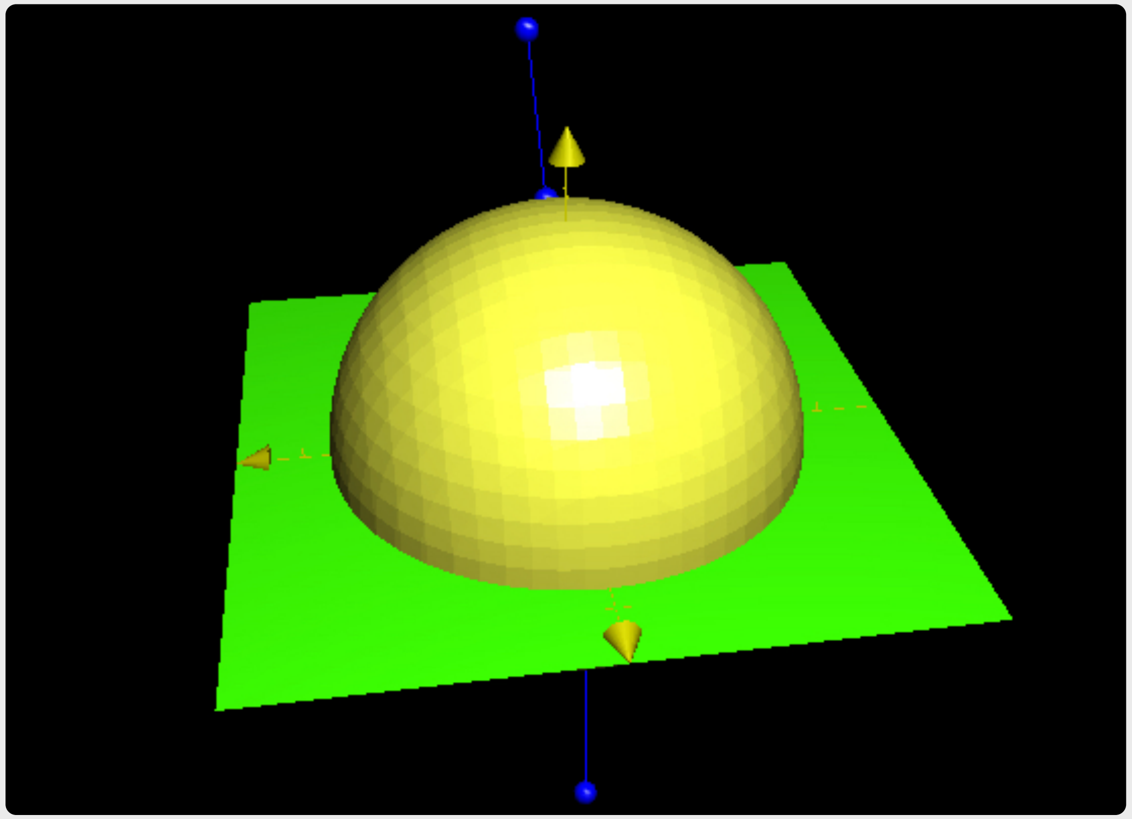
Solución.

Para aplicar el teorema de la divergencia precisamos una superficie cerrada. Como el campo F lo conocemos en el plano $z = 0$ resulta natural cerrar la semiesfera con dicho plano y orientando las normales como se indica en la figura.

Sea entonces S nuestra semiesfera y sea T la parte del plano $z = 0$ que satisface la condición $x^2 + y^2 \leq 25$. Entonces, aplicando el **teorema de Gauss** tenemos

$$\iint_{S\cup T} F \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iiint_V Div(F)\ dV$$

GALLERY 10.2 La semiesfera del ejercicio



Cerramos la semiesfera con un plano a altura $z = 0$. Vemos también las normales elegidas.

donde V es el volumen comprendido entre el plano y la semiesfera graficado.

Ahora bien, no podemos calcular $Div(F)$ pues no tenemos F pero sabemos que existe un $G \in C^2(R^3)$ tal que $F = Rot(G)$. Entonces debemos calcular

$$Div(Rot(G)) = \nabla \cdot (\nabla \times G).$$

Pero la divergencia de un rotor (con las condiciones C^2 del ejercicio) da 0. Es decir

$$Div(Rot(G)) = \nabla \cdot (\nabla \times G) = 0.$$

Luego

$$\iint_{S \cup T} F \cdot \overrightarrow{n}\, dS = \iiint_V Div(F)\, dV = \iiint_V Div(Rot(G))\, dV =$$

$$\iiint_V 0\, dV = 0.$$

Entonces

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{n}\, dS + \iint_T F \cdot \overrightarrow{n}\, dS = 0.$$

Pero la segunda integral la podemos calcular.

Parametricemos la tapa T por medio de la función

$$\varphi(x, y) = (x,\ y,\ 0) \qquad (x, y) \in D$$

siendo

$$D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

Calculando tenemos

$$\varphi'_x = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\varphi'_y = (0,\ 1,\ 0)$$

$$\overrightarrow{n} = \varphi'_x \times \varphi'_y = (0,\ 0,\ 1).$$

Pero de acuerdo al gráfico debemos tomar

$$\overrightarrow{n} = (0,\ 0, -1).$$

Entonces

$$\iint_T F \cdot \overrightarrow{n}\ dS = \iint_T (0,\ y,\ x-1) \cdot (0,\ 0, -1)\ dS =$$

$$\iint_T 1 - x\ dS = \iint_T 1\ dS = A(T) = \pi.5^2 = 25\pi.$$

pues la integral de x en el disco se anula. (Hágase si hay duda sobre este hecho).

Con todo esto tenemos

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{n}\ dS + 25\pi = 0,$$

luego el resultado final

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{n}\ dS = -25\pi.$$

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.