Capítulo 7

Integrales Curvilíneas.

Este capítulo abre la segunda parte de la materia : el cálculo integral vectorial. Las integrales de línea de campos escalares y vectoriales tienen aplicaciones a la física y a la ingeniería importantísimas, por ejemplo, el trabajo de una fuerza, el centro de masa de una curva con cierta densidad, la masa de una curva, etc.

SECCIÓN 1

Integrales de Línea de Campos Escalares.

CONTENIDOS

En esta sección repasamos el concepto de integral de línea de campo escalar a lo largo de una curva y vemos en detalle como parametrizar dicha curva. En general los cálculos de las integrales son sencillos y puede utilizarse una tabla en la evaluación final de las mismas. Lo que practicaremos es la parametrización de la integral de línea en detalle y sus interpretaciones. Éste es el tema fundamental de la sección.

Problemas.

(1) Calcular la longitud de las siguientes curvas

(a) parametrizada por

$$\sigma(t) = (cos(t), sen(t), 4), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Reparametrizarla en sentido contrario y verificar que la longitud es la misma.

(b) Hélice de ecuación paramétrica

$$\sigma(t) = (3\ cos(t), 3\ sen(t), 4t), \quad t \in [0, 4\pi].$$

Solución.

(a) La longitud de arco de nuestra curva C se calcula por la fórmula

$$L(C) = \int_C dl = \int_a^b \| \sigma'(t) \| \ dt.$$

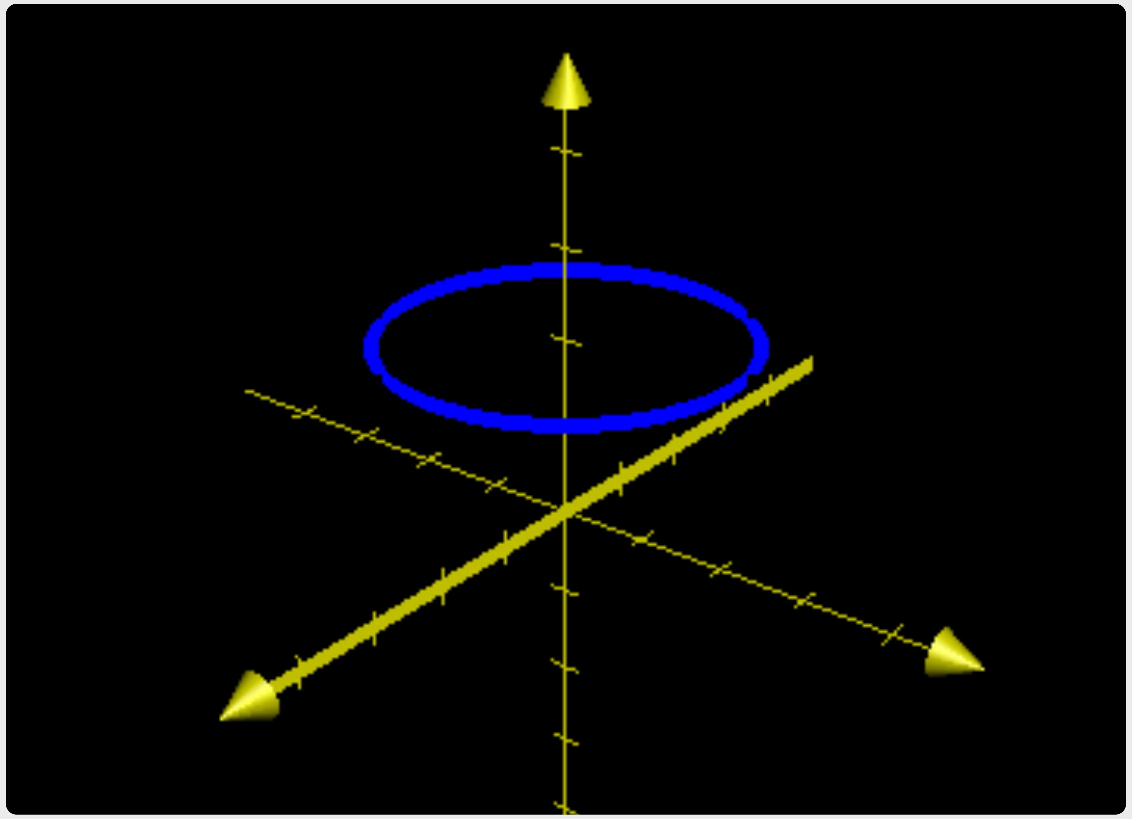
En nuestro caso resulta

$$\sigma'(t) = (-sen(t), cos(t), 0) \Longrightarrow \ \| (-sen(t), cos(t), 0) \| = 1$$

luego

$$L(C) = \int_C dl = \int_0^{2\pi} 1 \ dt = 2\pi.$$

que es la longitud de una circunferencia de radio 1.



La circunferencia en el espacio del ítem (a).

Para reparametrizarla en sentido opuesto hay varias maneras de proceder, pero la que daremos sirve para cualquier curva. No sólo para una circunferencia.

Hagamos el cambio de variable

$$u = 2\pi - t, \ t \in [0, 2\pi].$$

Observamos que al variar t desde 0 hasta 2π, u varía desde 2π hasta 0. Entonces

$$\gamma(t) = (cos(2\pi - t), sen(2\pi - t), 4), \quad t \in [0,2\pi]$$

recorre nuestra circunferencia en sentido contrario. Finalmente la longitud de la nueva circunferencia es

$$L(C) = \int_C dl = \int_a^b \| \gamma'(t) \| \, dt = \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi$$

como queríamos verificar.

(b) Nuevamente la longitud se calcula por la fórmula

$$L(C) = \int_C dl = \int_a^b \| \sigma'(t) \| \, dt.$$

Como

$$\sigma(t) = (3 \, cos(t), 3 \, sen(t), \, 4t), \quad t \in [0,4\pi]$$

tenemos

$$\sigma'(t) = (-3 \, sen(t), 3 \, cos(t), \, 4)$$

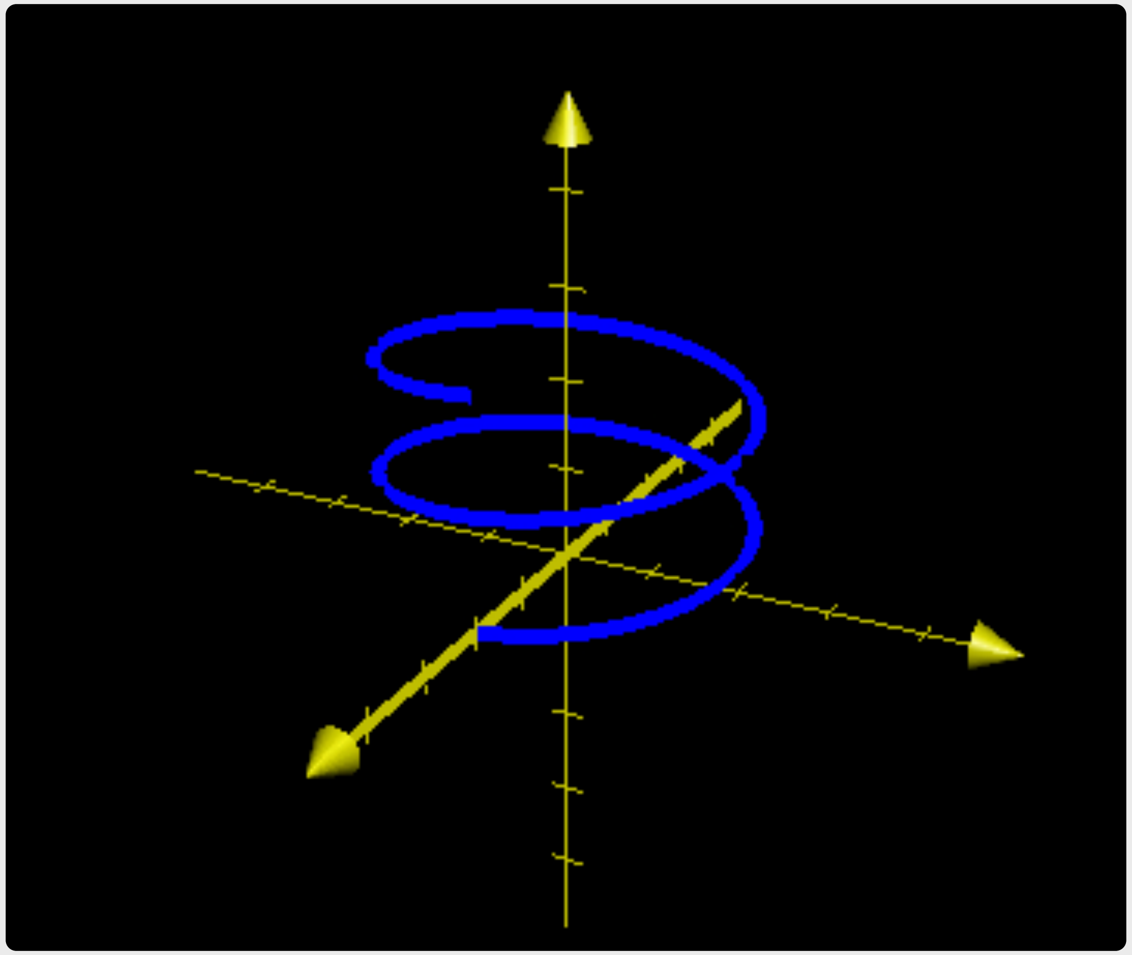
y por lo tanto

$$\| \sigma'(t) \| = \sqrt{9 \, (sen^2(t) + cos^2(t)) + 16} = 5.$$

Entonces la longitud de la curva resulta

$$L(C) = \int_C dl = \int_0^{4\pi} \| \sigma'(t) \| \, dt = \int_0^{4\pi} 5 \, dt = 20\pi.$$

GALLERY 7.1 Hélice



La hélice del item (b). Da “dos vueltas” porque el intervalo de variación de t es $[0,4\pi]$

(2) Calcular $\int_C f\ dl$ siendo

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}, \quad C: x^2+y^2=4, \quad y>0.$$

Interpretar geométricamente el resultado.

Solución.

Lo primero que debemos hacer es parametrizar la curva C. Esto es muy fácil ya que es la parte superior de la circunferencia indicada. Sabemos que podemos parametrizarla así

$$c(t) = (2\ cos(t), 2\ sent(t)), \quad t \in (0,\pi).$$

Ahora bien, por definición

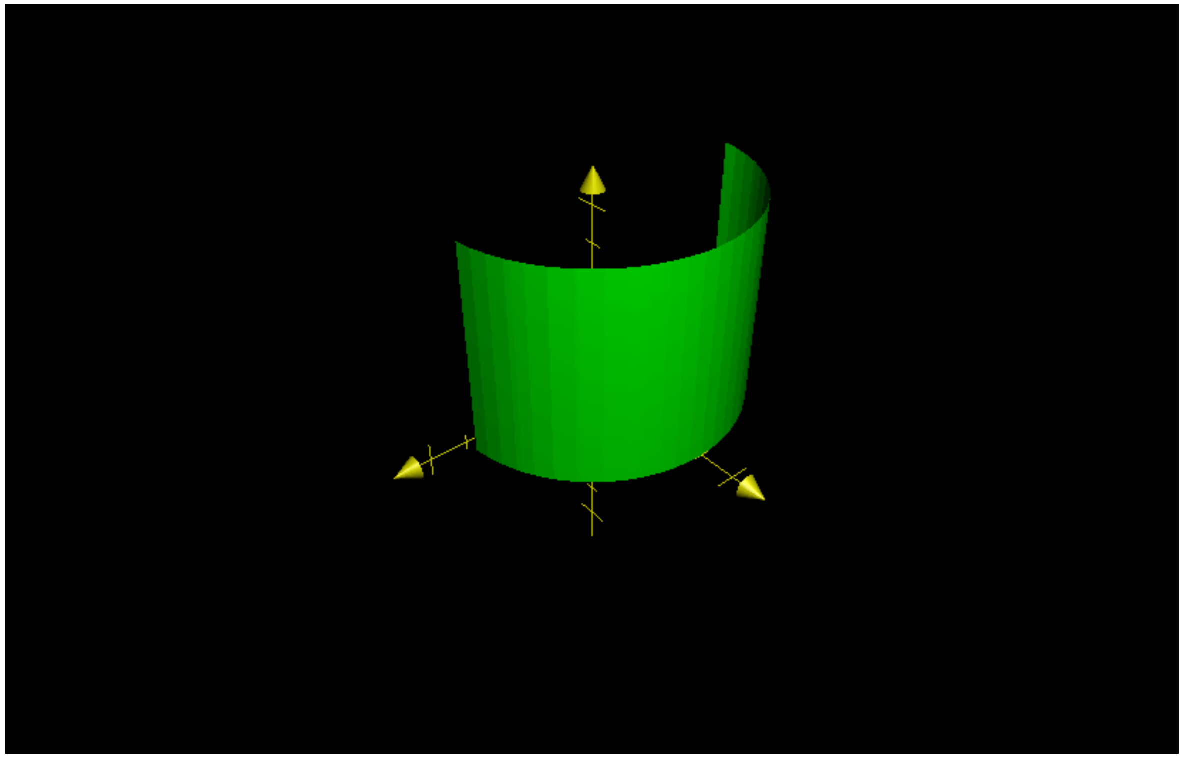
$$\int_C f\ dl = \int_0^{\pi} f(c(t))\ .\ \|\ c'(t)\ \|\ dt$$

que en nuestro caso resulta

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4\ cos^2(t) + 4\ sen^2(t)}\ .\ \|\ (-2\ sen(t),\ 2\ cos(t)\ \|\ dt =$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{4} .2\ dt = \frac{\pi}{2}.$$

La interpretación geométrica de este resultado es el área que se forma al unir todos los segmentos que se forman al elevar en el eje z cada punto de la semicircunferencia hasta su imagen.



(3) Hallar la masa de un alambre que es intersección de $z = x^2 + y^2$ y $z = 2x$ en el primer octante , entre (2,0,4) y (1,1,2) si su densidad lineal de masa es $\delta(x,y,z) = (x-1)y$.

Solución.

Lo primero que debemos hallar es una parametrización de la curva. Esto es fácil porque la segunda ecuación define al parámetro. Por ejemplo

$$c(t) = (t, \sqrt{2t - t^2}, 2t), \quad t \in [1,2]$$

Observemos que $c(1) = (1,1,2)$ y $c(2) = (2,0,4)$ pero la integral de línea de campo escalar no cambia según el sentido así que no hay inconveniente. Ahora, por definición tenemos

$$\int_C \delta \; dl = \int_1^2 \delta(c(t)) \, . \, \| \, c'(t) \, \| \; dt =$$

$$\int_1^2 (t-1)\sqrt{2t - t^2} \, . \, \| \, (1, \frac{1-t}{\sqrt{2t - t^2}}, 2) \, \| \; dt =$$

$$\int_1^2 (t-1)\sqrt{5} \; dt = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

SECCIÓN 2

Integrales de Línea de Campos Vectoriales.

CONTENIDOS

1. Integral de línea de campo vectorial.
2. Trabajo de una fuerza a la largo de una curva.
3. Campos conservativos.

En esta sección fundamental aprendemos a calcular integrales de línea de campo vectorial y continuamos las aplicaciones de este tipo de integrales a la física.

Problemas.

(1) Calcular $\displaystyle\oint_{C^+} f \cdot dl$ siendo $C : |x| + |y| = 1$

y $f(x, y) = (2x, -y)$.

Solución.

Este sencillo ejercicio nos permite repasar la definición de integral de línea de un campo vectorial. Lo primero que haremos es parametrizar cada arista del cuadrado para luego integrar allí. Finalmente sumaremos las integrales sobre las cuatro aristas.

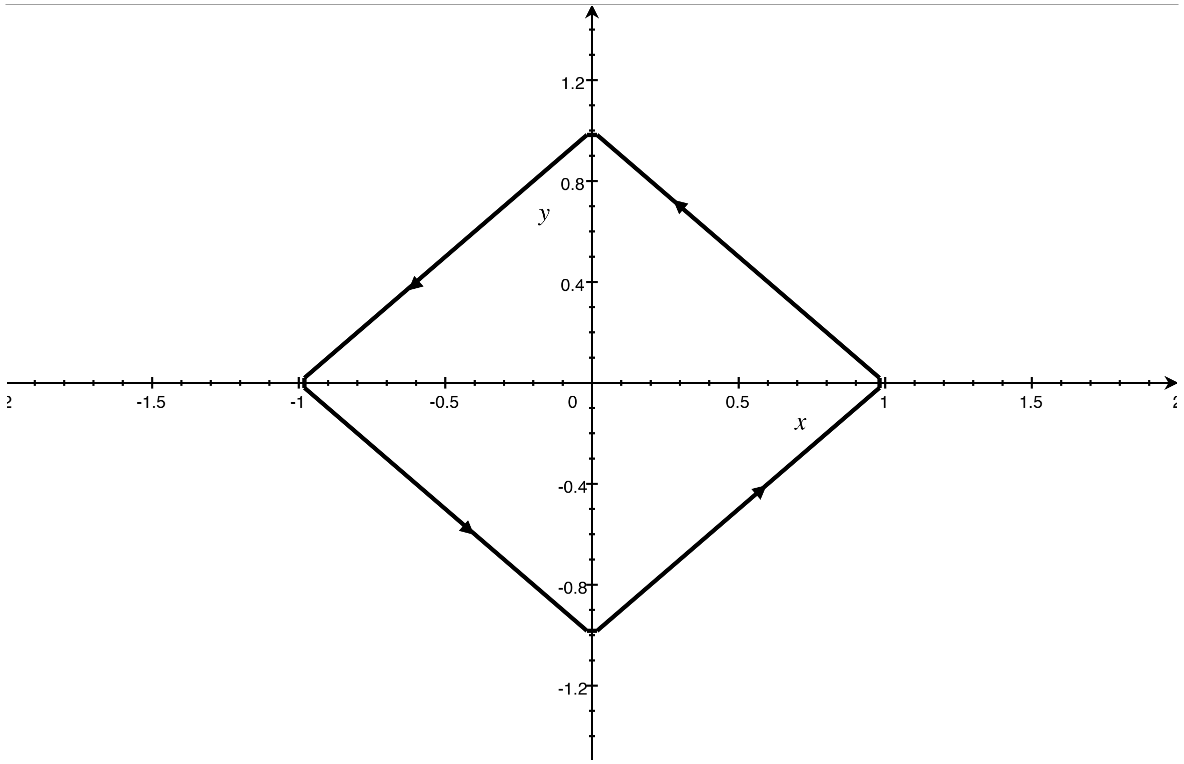
La arista del primer cuadrante se puede parametrizar, pensando que la ordenada es el parámetro así

$$c(t) = (1 - t, t), \quad t \in [0,1].$$

Ahora, por definición de integral de línea de campo

$$\int_c (2x, -y) \cdot dl = \int_0^1 \big(2(1-t), -t\big) \cdot (-1,1)\ dt =$$

$$\int_0^1 t - 2\ dt = \frac{-3}{2}.$$



Pasando al segundo cuadrante podemos repasar como se parametriza cualquier segmento $\overrightarrow{AB}$. El segmento que va desde A hasta B se puede parametrizar

$$c(t) = A + t\,.(B - A), \quad t \in [0,1].$$

En nuestro caso $A = (0,1)$ y $B = (-1,0)$, por lo tanto

$$c(t) = (0,1) + t\,.(-1, -1) = (-t, 1 - t), \quad t \in [0,1].$$

Entonces

$$\int_c (2x, -y) \cdot dl = \int_0^1 \big(2(-t), -(1-t)\big) \cdot (-1, -1)\ dt =$$

$$\int_0^1 t + 1\ dt = \frac{3}{2}.$$

Dejamos como un simple ejercicio parametrizar las dos aristas restantes y el cálculo de las correspondientes integrales de línea, para obtener el resultado final

$$\oint_{C^+} f \cdot dl = 0$$

(2) Analizar si los siguientes campos admiten función potencial y en caso afirmativo hallarla.

(a) $F(x, y) = (2x + y^2 sen(2x), 2y\ sen^2(x))$

(b) $F(x, y, z) = (xy, x + zy, yz)$

Solución.

Debemos verificar si la matriz Jacobiana $D(f)$ es continua y simétrica. Obviamente la diagonal de la misma no hace falta calcularla. Sólo hay que verificar que

$$Q'_x = P'_y.$$

donde $P(x, y) = 2x + y^2 sen(2x), \quad Q(x, y) = 2y\ sen^2(x).$

Calculando tenemos

$$Q'_x = 2y.2sen(x)cos(x) \qquad\qquad P'_y = 2y\,.\,sen(2x),$$

pero que aparentemente no sean iguales no significa que realmente lo sean. Debemos observar si alguna identidad no transforma una en la otra. Recordamos que

$$sen(2x) = 2\ sen(x)\ cos(x).$$

Por lo tanto

$$Q'_x(x, y) = P'_y(x, y)$$

en todo R^2. Luego el campo admite función potencial en todo R^2.

Finalmente para hallar efectivamente la función potencial debemos hallar una función $\varphi : R^2 \to R$:

$$\nabla \varphi(x, y) = F(x, y).$$

En componentes esta igualdad se transforma en el sistema

$$\begin{cases} \varphi_x'(x,y) = 2x + y^2 sen(2x) \\ \varphi_y'(x,y) = 2y\ sen^2(x) \end{cases}.$$

Integrando la primera ecuación obtenemos

$$\varphi(x,y) = x^2 - y^2\ \frac{cos(2x)}{2} + \alpha(y).$$

Sustituyendo en la segunda tenemos

$$\varphi_y'(x,y) = -\ y\ cos(2x) + \alpha'(y) = 2y\ sen^2(x).$$

de lo cual, recordando que $cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$ obtenemos

$$\alpha'(y) = y$$

y por lo tanto, una posible función α es

$$\alpha(y) = \frac{y^2}{2}.$$

Esto nos permite decir que una función potencial del campo F es

$$\varphi(x,y) = x^2 - y^2\ \frac{cos(2x)}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Todos los demás potenciales difieren de éste hallado en una constante.

(b) El campo del ejercicio es

$$F(x,y,z) = (xy, x + zy, yz) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)).$$

Debemos averiguar si la matriz Jacobiana es continua y simétrica en R^2. Recordamos que la matriz Jacobiana de F es

$$D(f) = \begin{pmatrix} P_x' & P_y' & P_z' \\ Q_x' & Q_y' & Q_z' \\ R_x' & R_y' & R_z' \end{pmatrix}(x,y).$$

Calculando vemos inmediatamente que

$$P_y'(x,y) = x \neq Q_x'(x,y) = 1$$

entonces el campo F no admite función potencial.

(3) Sea $F(x,y,z) = \left(\frac{4x}{z}, \frac{2y}{z}, -\frac{2x^2+y^2}{z^2}\right), \quad z \neq 0.$

(a) Mostrar que F admite función potencial para $z > 0$.

(b) Describir las superficies equipotenciales de F.

(c) Calcular la circulación de F a lo largo de la curva C descripta por

$$x = 1 + ln(1 + |sen(t)|),\ y = e^{t(\pi - t)},\ z = 1 + t/\pi,\quad t \in [0,\pi].$$

Solución.

(a) Para ver que admite función potencial debemos ver si, para $z > 0$ la matriz

$$D(f) = \begin{pmatrix} P_x^{'} & P_y^{'} & P_z^{'} \\ Q_x^{'} & Q_y^{'} & Q_z^{'} \\ R_x^{'} & R_y^{'} & R_z^{'} \end{pmatrix}$$

es continua y simétrica. Dejamos como un repaso de cálculo de derivadas parciales que esto es así.

(b) Debemos hallar una función $\varphi : D = R^3_{z>0} \to R$:

$$\begin{cases} \varphi_x^{'} = \frac{4x}{z} \\ \varphi_y^{'} = \frac{2y}{z} \\ \varphi_z^{'} = -\frac{2x^2 + y^2}{z^2} \end{cases}$$

Integrando la tercera encontramos que

$$\varphi(x, y, z) = \frac{2x^2 + y^2}{z} + \alpha(x, y)$$

y luego, sustituyendo en las dos primeras hallamos que

$$\alpha_x'(x, y) = \alpha_y'(x, y) = 0.$$

Por lo tanto el potencial de F es salvo una constante

$$\varphi(x, y, z) = \frac{2x^2 + y^2}{z}.$$

Para hallar las superficies equipotenciales tenemos que hallar el conjunto

$$N_k(\varphi) = \{(x, y, z) \in D : \varphi(x, y, z) = k\}.$$

Observamos que debe ser $k \geq 0$, pues $z > 0$.

Por ejemplo

$$N_1(\varphi) = \{(x, y, z) \in D : \varphi(x, y, z) = 1\}$$

implica

$$\varphi(x, y, z) = \frac{2x^2 + y^2}{z} = 1 \Longrightarrow z = 2x^2 + y^2.$$

es decir la superficie equipotencial es un paraboloide y lo mismo ocurre con cualquier valor de $k \in R^+$.

Para $k = 0$ tenemos sólo una línea equipotencial pues

$$\varphi(x,y,z)=\frac{2x^2+y^2}{z}=0 \Longrightarrow 2x^2+y^2=0 \Longrightarrow (x,y)=(0,0).$$

Luego

$$N_0(\varphi)=\{(x,y,z):(x,y,z)=(0,0,t):t>0\}.$$

(c) Esta es la parte más interesante del ejercicio. Nos piden calcular

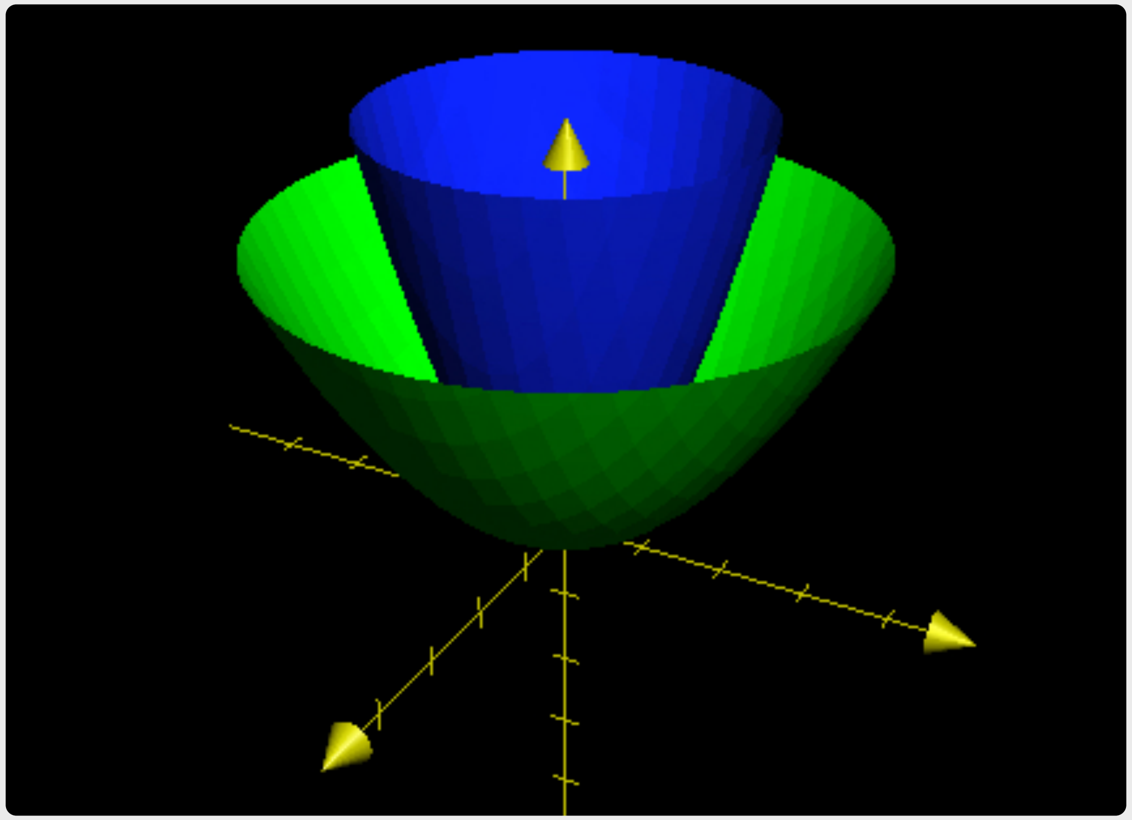
$$\int_C F\cdot dl.$$

Como el campo es conservativo esta integral sólo depende de los puntos inicial y final del recorrido. Luego podemos escribir

$$\int_C F\cdot dl=\int_{(1,1,1)}^{(1,1,2)} F\cdot dl=\int_{(1,1,1)}^{(1,1,2)} \nabla\varphi\cdot dl=\varphi(1,1,2)-\varphi(1,1,1)$$

$$\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}.$$

Nota : Esto nos dice aún más : el trabajo de la fuerza F a lo largo de la curva C o matemáticamente $\int_C F\cdot dl$ vale lo mismo a través de cualquier curva que una los puntos inicial y final y es el mismo valor a lo largo de cualquier curva que una dos puntos de las mismas superficies equipotenciales.



Si A es cualquier punto de la superficie equipotencial azul ($\varphi=3$) y B es cualquier punto de la superficie equipotencial verde ($\varphi=5$) entonces $\int_A^B F\cdot dl=\varphi(B)-\varphi(A)=2$.

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(4) Evaluar

$$\oint_C (e^x sen(y)+3y)\,dx+(e^x cos(y)+2x-2y)\,dy$$

siendo $C : 4x^2 + y^2 = 4$. Indicar el sentido elegido.

Solución.

Comencemos por verificar si $Q'_x = P'_y$.

$$Q'_x = e^x cos(y) + 2 \neq e^x cos(y) + 3 = P'_y.$$

Luego nuestro campo no es conservativo y no podemos garantizar que la circulación a lo largo de una curva cerrada sea 0. Debemos calcular efectivamente la integral para saber su valor.

Pero la integral que se nos pide es bastante difícil cuando la intentamos calcular por la presencia de los sumandos que contiene e^x multiplicada por alguna función triginométrica. Pero esos sumandos por separado si satisfacen la condición $Q'_x = P'_y$. Tratemos de aprovechar este hecho como sigue.

$$\oint_C (e^x sen(y) + 3y)\ dx + (e^x cos(y) + 2x - 2y)\ dy =$$

$$\oint_C e^x sen(y)\ dx + e^x cos(y)\ dy + \oint_C 3y\ dx + (2x - 2y)\ dy.$$

La primera integral se anula por lo explicado en el párrafo precedente. Luego sólo debemos calcular la segunda.

Nuestra **elipse** se puede re-escribir en la forma

$$C : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

y por lo tanto parametrizarla asi

$$x(t) = cos(t), \quad y(t) = 2\ sen(t), \quad t \in [0,2\pi].$$

Entonces, orientando la elipse positivamente

$$\oint_{C^+} 3y\ dx + (2x - 2y)\ dy =$$

$$\int_0^{2\pi} 3.\ 2\ sen(t)\,.\,(-sen(t)) + [2\ cos(t) - 2.\ 2\ sen(t)].2\ cos(t)\ dt =$$

$$\int_0^{2\pi} -6\ sen^2(t) + 4\ cos^2(t) - 8\ sen(t)\ cos(t)\ dt =$$

$$-6\pi + 4\pi - 0 = -2\pi.$$

(5) Sea $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ un campo de gradientes con matriz Jacobiana

$$D(F(x,y)) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabiendo que la gráfica de su función potencial pasa por $(1{,}2{,}1)$ y que su plano tangente en dicho punto tiene ecuación $x - y + z = 0$, comprobar que la circulación de F a lo largo de cualquier curva que una un punto A en el eje y con un punto B en la parábola $y = x^2$ es 0.

Solución.

De la información de la matriz Jacobiana obtenemos igualando componente a componente

$$P'_x = -6x, \quad P'_y = 1, \quad Q'_x = 1, \quad Q'_y = 0.$$

Considerando la primera tenemos

$$P(x,y) = -3x^2 + \alpha(y),$$

de lo cual, sustituyendo en la segunda

$$P'_y = \alpha'(y) = 1 \Longrightarrow \alpha(y) = y + K.$$

Luego

$$P(x,y) = -3x^2 + y + K.$$

Análogamente usando la tercera obtenemos

$$Q(x,y) = x + \beta(y),$$

de lo cual sustituyendo en la cuarta

$$Q'_y = \beta'(y) = 0 \Longrightarrow \beta(y) = J.$$

Luego

$$Q(x,y) = x + J.$$

Supongamos que la función potencial es $\varphi(x,y)$.

Como la gráfica de la función potencial pasa por $(1{,}2{,}1)$ tenemos

$$\varphi(1{,}2) = 1.$$

Además, por ser $\varphi(x,y)$ potencial de F sabemos que

$$\varphi'_x(x,y) = -3x^2 + y + K \qquad \text{y} \qquad \varphi'_y(x,y) = x + J.$$

Pero de la ecuación del plano tangente a $\varphi(x,y)$ en $(1{,}2{,}1)$ tenemos

$$z = -x + y$$

lo cual nos dice que

$$\varphi'_x(1{,}2) = -1 \qquad \text{y} \qquad \varphi'_y(1{,}2) = 1.$$

Por lo tanto tenemos $K = 0, \quad J = 0.$

Con estos valores nulos de K y J tenemos

$$\varphi'_x(x,y) = -3x^2 + y \qquad \varphi'_y(x,y) = x$$

y entonces vemos a ojo (si no háganse las cuentas)

$$\varphi(x,y) = -x^3 + xy + L$$

que como $\varphi(1,2) = 1$ resulta $L = 0$.

Es decir la función potencial del campo F es

$$\varphi(x,y) = -x^3 + xy.$$

Finalmente podemos calcular la circulación. Como A es un punto del eje y tenemos $A = (0,y_0)$. Como B es un punto de la parábola tenemos $B = (x_0, x_0^2)$. Y como el campo es de gradientes podemos escribir que para cualquier curva que una A con B tenemos

$$\int_C F \cdot dl = \int_{(0,y_0)}^{(x_0,x_0^2)} \nabla\varphi \cdot dl = \varphi(x_0, x_0^2) - \varphi(0,y_0) =$$

$$-x_0^3 + x_0^3 - 0 = 0,$$

como queríamos comprobar.