Capítulo 9.

Integrales de Superficie.

Este capítulo cierra los tipos de integrales que estudiamos en el curso. Se practica el concepto de integral de superficie y se dan aplicaciones geométricas y físicas. El concepto de flujo de un campo vectorial a través de una superficie es fundamental para comprender los dos teoremas más importantes de la materia : el teorema de Gauss y el teorema de Stokes.

SECCIÓN 1.

Integrales de superficie de campos escalares.

En esta sección estudiamos las integrales de superficie de campos escalares que como caso especial con campo constante igual a la unidad obtenemos el área de la superficie.

Sorprendentemente la dificultad de estos ejercicios es al comienzo de los mismos, de modo que es allí donde debemos dirigir nuestra mayor atención.

CONTENIDOS

Problemas.

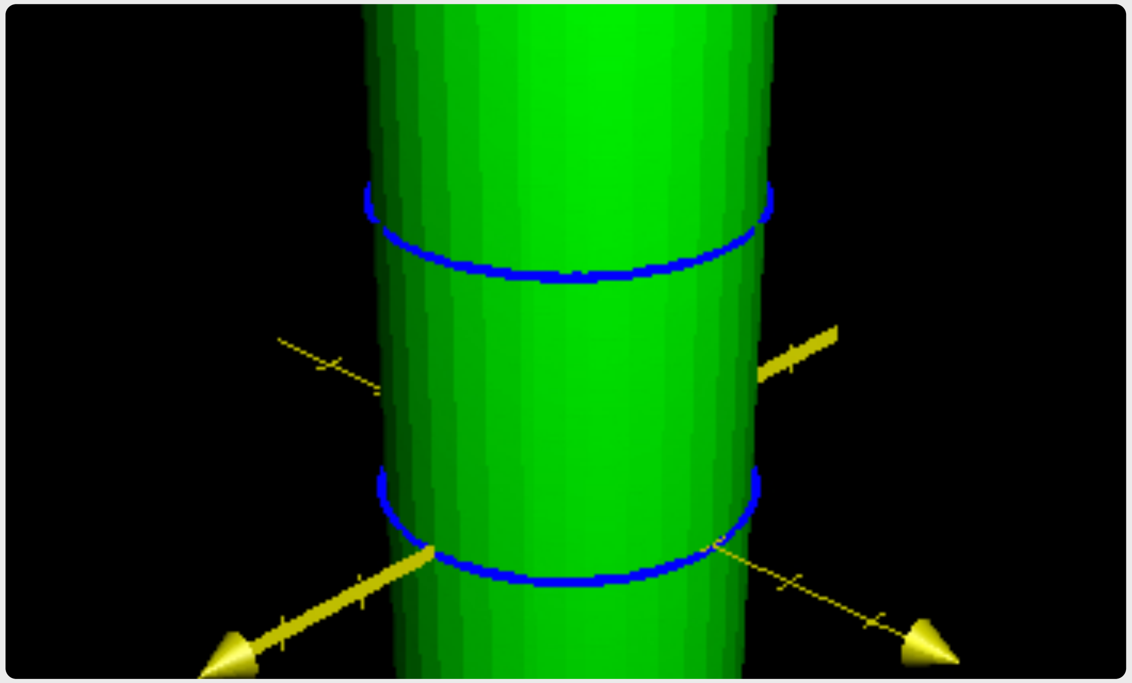
(1) Hallar el área del trozo de cilindro de ecuación

$$x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \le z \le 2.$$

Solución.

Evidentemente se trata del siguiente cilindro

GALLERY 9.1 El cilindro del ejercicio



Nos imaginamos al cilindro como una unión de circunferencias de radio 2 y altura variable. Imaginamos que la circunferencia azul a altura inicial $z = 0$ se va elevando hasta la altura final $z = 2$.

De acuerdo a lo explicado abajo de la figura, de la misma manera que

$$c(t) = (2\ cos(t), 2\ sen(t), 0) \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametriza una circunferencia de radio 2 a altura $z = 0$, y lo mismo

$$c(t) = (2\ cos(t), 2\ sen(t), 2) \quad t \in [0, 2\pi]$$

parametriza una circunferencia de radio 2 a altura $z = 2$, precisamos un nuevo parámetro que haga variar la altura en una forma similar a como t hace variar el ángulo.

Esto nos conduce a definir la función

$$\varphi(t, z) = (2\ cos(t),\ 2\ sen(t),\ z), \quad t \in [0, 2\pi] \ \wedge \ z \in [0, 2] .$$

que es una parametrización de la superficie buscada.

Ahora bien, el área de una superficie de este tipo se calcula por la integral

$$\int\int_S 1\ dS = \int\int_D \| \varphi'_t \wedge \varphi'_z \| \ \ dt\ dz$$

donde $\quad D = \{(t, z) \in R^2 : t \in [0, 2\pi] \ \wedge \ z \in [0, 2]\} .$

Calculando tenemos

$$\varphi_t' = (-2\ sen(t),\ 2\ cos(t),\ 0)$$

$$\varphi_z' = (\quad 0 \quad , \quad 0 \quad , \quad 1)$$

entonces

$$\varphi_t' \wedge \varphi_z' = (2\ cos(t),\ 2\ sen(t),\ 0).$$

Obviamente

$$\| \varphi_t' \wedge \varphi_z' \| = \| (2\ cos(t),\ 2\ sen(t),\ 0) \| = 2$$

Entonces el área de nuestra superficie es

$$A(S) = \int\int_S 1\ dS = \int\int_D \| \varphi_t' \wedge \varphi_z' \|\ \ dt\ dz =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 2\ dz\ dt = \int_0^{2\pi} 4\ dt = 8\pi.$$

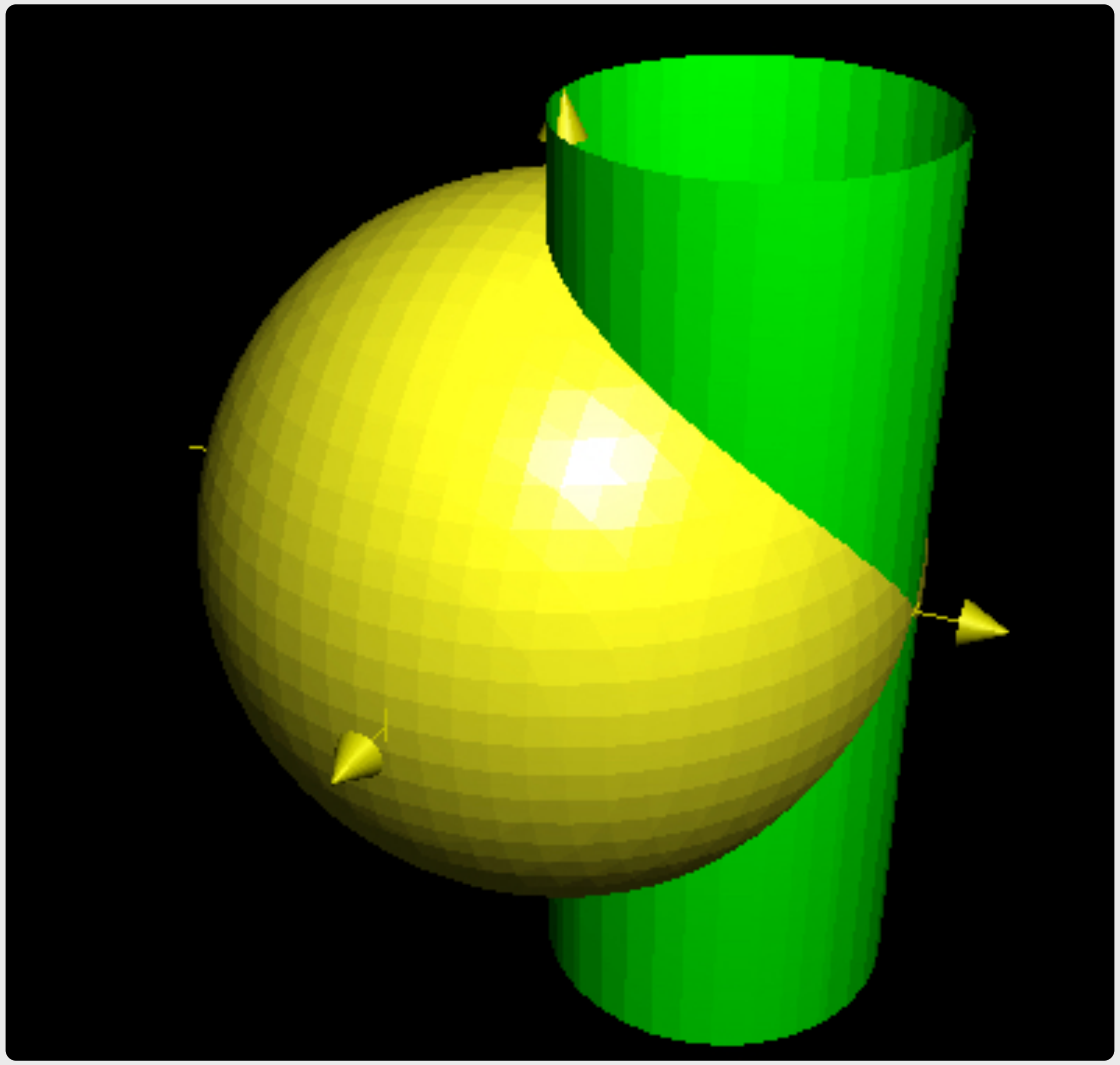
Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(2) Hallar el área del trozo de cilindro

$$x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

Solución.

GALLERY 9.2 La superficie del ejercicio.

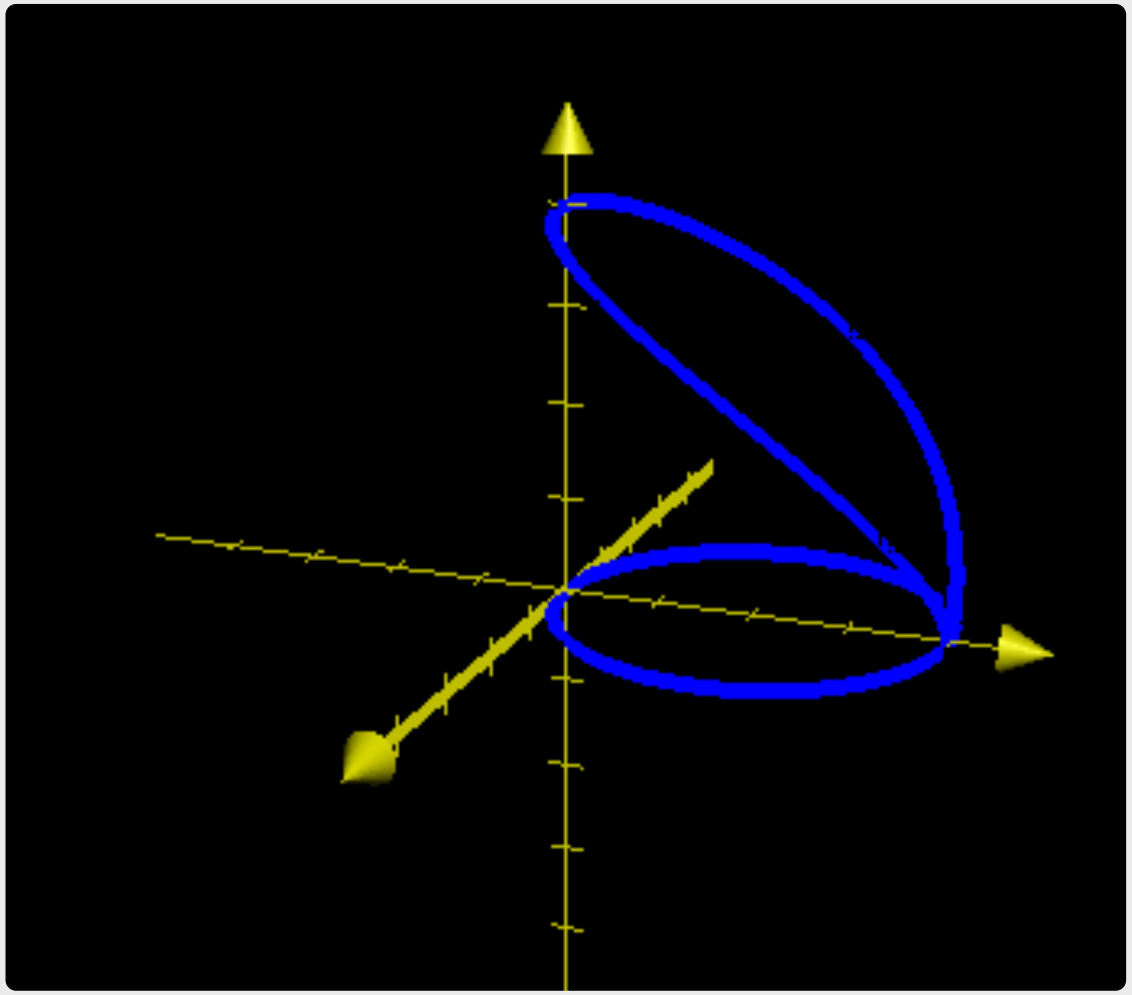


Una vez más este dibujo. Ahora para calcular el área del cilindro verde acotado por la esfera amarilla.

Un error común es creer, posiblemente por el gráfico, que se trata del área de una porción de esfera. Esto es incorrecto porque la superficie es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 2y$ que satisface la desigualdad $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

Por consideraciones geométricas nos podemos restringir al semiespacio $z \geq 0$ y luego multiplicar por 2.

GALLERY 9.3 Intersección de la esfera y el cilindro



Vemos la parte superior de la intersección de la esfera y el cilindro.

La curva siguiente es evidentemente fundamental para nuestro ejercicio.

Para parametrizar nuestra superficie podemos proyectar esta curva sobre cualquiera de los planos xz, yz, pero no sobre el plano xy.

Concentrémonos por ejemplo en la parte delantera de la curva azul. Encontremos una relación necesaria que no dependa de la variable x que se deduzca de

$$x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Sustituyendo la primera en la segunda tenemos

$$2y = 4 - z^2 \Longrightarrow y = 2 - \frac{z^2}{2},$$

que para $z \geq 0$ se grafica como vemos en la siguiente hoja.

Luego una parametrización posible de nuestra superficie es

$$\varphi(y,z) = (\sqrt{2y - y^2},\ y,\ z), \quad (y,z) \in D$$

donde

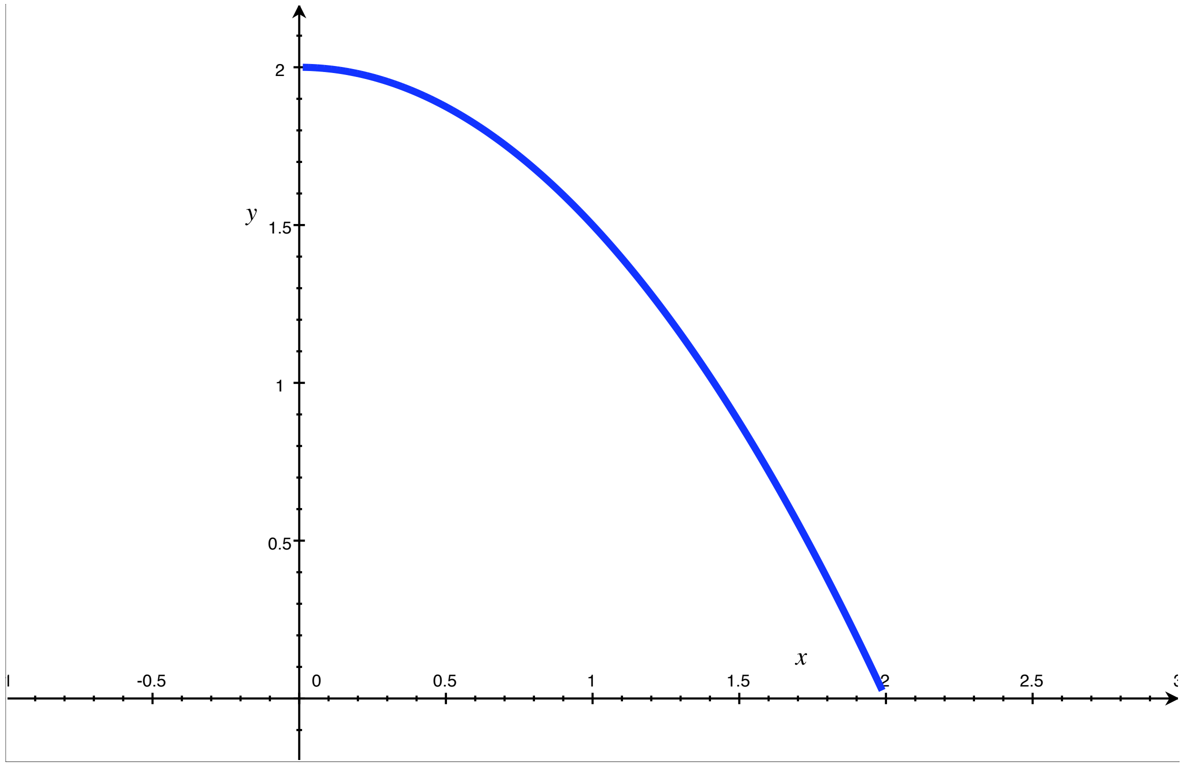
$$D = \{(y,z) \in R^2 : 0 \leq z \leq 2 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 2 - \frac{z^2}{2}\}.$$

Calculando ahora para ya formar la integral de superficie tenemos

$$\varphi'_y = (\frac{1-y}{\sqrt{2y-y^2}},\ 1,\ 0)$$

$$\varphi'_z = (\quad 0 \quad ,\quad 0,\quad 1)$$

cuyo producto vectorial es



$$\varphi'_y \wedge \varphi'_z = (1, \frac{y-1}{\sqrt{2y-y^2}},\ 0)$$

y por lo tanto

$$\| \varphi'_y \wedge \varphi'_z \| = \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}.$$

Finalmente tenemos

$$A(S) = \iint_S 1\ dS = \iint_D \| \varphi'_y \wedge \varphi'_z \| \ \ dy\ dz =$$

$$\int_0^2 \int_0^{2-\frac{z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}\ dy\ dz = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-2y}} \frac{1}{\sqrt{2y-y^2}}\ dz\ dy =$$

$$\int_0^2 \frac{\sqrt{2}\sqrt{2-y}}{\sqrt{y}\sqrt{2-y}} dy = 2\sqrt{2} \int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{y}} = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4.$$

Luego multiplicando por 4 obtenemos el resultado final

$$A(S) = 16.$$

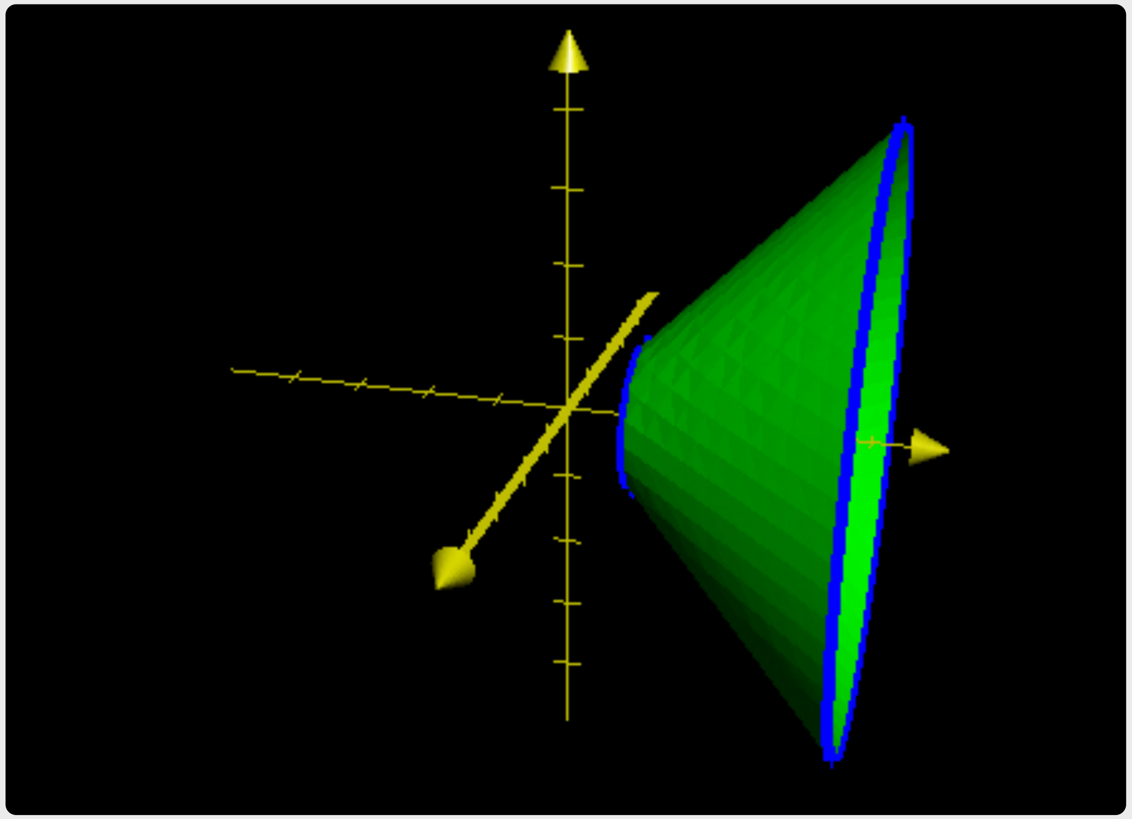
Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(3) Calcular el momento de inercia respecto del eje y de una chapa con forma de cono $y = \sqrt{x^2+z^2}, \quad 1 \le y \le 4$ si la densidad de masa superficial es constante.

Solución.

La fórmula del momento de inercia respecto del eje y con densidad $\delta(x,y,z)$ es

GALLERY 9.4 Cono truncado



Pensamos este trozo de cono como unión de circunferencias de radio variable en función de y.

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \,.\, \delta(x,y,z) \; dS,$$

es decir, en nuestro caso debemos hallar

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \,.\, k \; dS.$$

Nuestra placa tiene la forma siguiente

La superficie puede ser parametrizada por

$$\varphi(t,y) = (y \; cos(t),\; y,\; y \; sen(t)), \quad t \in [0,2\pi], \quad y \in [1,4],$$

pues esto parametriza a "altura y" una circunferencia de radio y.

Calculando tenemos

$$\varphi'_t = (-y \; sen(t),\; 0,\; y \; cos(t))$$

$$\varphi'_y = (cos(t) \quad ,\; 1, \quad sen(t))$$

por lo tanto

$$\varphi'_t \wedge \varphi'_y = (-y \; cos(t), y, -y \; sen(t))$$

luego

$$\| \varphi'_t \wedge \varphi'_y \| = \sqrt{2y^2} = \sqrt{2} \,.\, y.$$

Por lo tanto, sustituyendo en la expresión del momento de inercia tenemos

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \,.\, k \; dS = \int_1^4 \int_0^{2\pi} y^2 \,.\, k \,.\, \sqrt{2} \,.\, y \; dt \; dy =$$

$$\sqrt{2}.2\pi \,.\, k \int_1^4 y^3 \; dy = \sqrt{2}.2\pi \,.\, k \frac{255}{4}.$$

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

SECCIÓN 2.

Integrales de superficie de campos vectoriales - Flujo.

CONTENIDOS

En esta sección fundamental, con ya alguna práctica sobre parametrizaciones de superficies, presentamos el concepto de flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

Es imposible exagerar la importancia de esta sección : uno de los miembros de la igualdad en los teoremas de Stokes y Gauss es un flujo a través de una superficie.

Por otro lado debemos prestar atención a la normal que aparece en la integral de superficie pues ésta cambia de signo si se cambia el sentido de la misma.

Problemas.

(1) Calcular el flujo de $F(x,y,z)=(xy,\ x,\ z)$ a través de la superficie frontera del cuerpo H con normal $\overrightarrow{n}$ saliente si $H=[0,2]\times[0,2]\times[0,2]\subset R^3$.

Solución.

Nos piden calcular la integral

$$\iint_H F\cdot\overrightarrow{n}\ dS.$$

La superficie H es evidentemente la union de las 6 caras de un cubo de lado 2. Observamos entonces que nuestra integral es igual a la suma de 6 integrales, a saber

$$\iint_H F\cdot\overrightarrow{n}\ dS=\iint_{H_1} F\cdot\overrightarrow{n}\ dS+\ldots+\iint_{H_6} F\cdot\overrightarrow{n}\ dS$$

donde cada H_i es una de las distintas caras del cubo.

Sea por ejemplo

$H_1=\{(x,y,z)\in R^3: 0\le x\le 2,\ y=2,\ 0\le z\le 2\}.$

Esta cara se parametriza por

$$\varphi(x,z)=(x,\ 2,\ z),\qquad x\in[0,2],\ z\in[0,2].$$

Calculando tenemos

$$\varphi'_x=(1,\ 0,\ 0)$$

$$\varphi'_z=(0,\ 0,\ 1)$$

luego

$$\varphi'_x\wedge\varphi'_z=(0,\ -1,\ 0),$$

pero esta normal apunta hacia adentro del cubo. Entonces debemos tomar

$$\overrightarrow{n}=(0,\ 1,\ 0).$$

Ahora,

$$\iint_{H_1} F\cdot\overrightarrow{n}\ dS=\iint_{H_1}(xy,\ x,\ 2z)\cdot(0,\ 1,\ 0)\ dS=$$

$$\int_0^2\int_0^2 x\ dx\ dz=\int_0^2 2\ dz=4.$$

Dejamos como un sencillo ejercicio hacer el resto de las caras del cubo para concluir sumando esos resultados que el resultado final es

$$\iint_H F \cdot \overrightarrow{n}\, dS = 8.$$

(2) Hallar el flujo de $F(x, y, z) = (y,\ x^2 - y,\ xy)$ a través del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $y = x^2$ en el primer octante con $x + y + z \leq 2$, indicando en un gráfico la orientación elegida para $\overrightarrow{n}$.

Solución.

Comencemos por dibujar y parametrizar la superficie. El resto será fácil.

Proyectemos nuestra superficie sobre el plano xz. Eliminando la variable y de las ecuaciones

$$y = x^2, \qquad x + y + z = 2$$

obtenemos

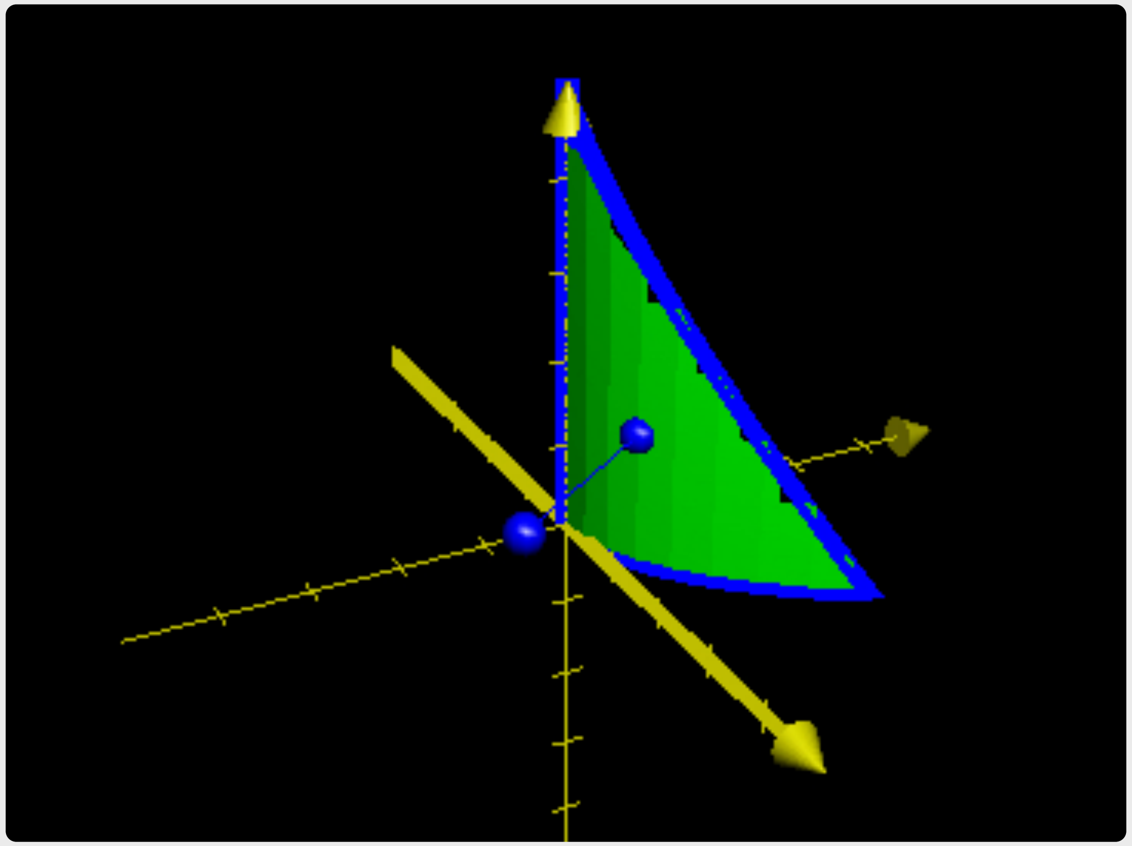
$$x + x^2 + z = 2 \Longrightarrow z = 2 - x - x^2.$$

Luego, una parametrización de nuestra superficie en función de las variables xz es

$$\varphi(x, z) = (x,\ x^2,\ z) \qquad (x, z) \in D$$

siendo

GALLERY 9.5 La superficie del ejercicio



La superficie del ejercicio y el sentido de la normal elegido.

$$D = \{(x, z) \in D : 0 \leq x \leq 1\ \wedge\ 0 \leq z \leq 2 - x - x^2\}.$$

Calculando tenemos

$$\varphi'_x = (1,\ 2x,\ 0)$$

$$\varphi'_z = (0,\quad 0,\ 1)$$

luego

$$\vec{n} = (2x, -1, 0)$$

normal que está de acuerdo con la elegida en el gráfico.

Ahora sí,

$$\iint_S F \cdot \vec{n}\, dS = \iint_S (y,\, x^2 - y,\, xy) \cdot (2x, -1, 0)\, dS =$$

$$\int_0^1 \int_0^{2-x-x^2} (x^2, x^2 - x^2,\, x\,.\,x^2) \cdot (2x, -1, 0)\, dz\, dx =$$

$$\int_0^1 \int_0^{2-x-x^2} 2x^3\, dz\, dx = \int_0^1 2x^3\,.\,(2 - x - x^2)\, dx = \frac{49}{15}.$$

Por lo tanto, el flujo del campo vectorial F a través de la superficie S con la normal $\vec{n}$ indicada es

$$\iint_S F \cdot \vec{n}\, dS = \frac{49}{15}.$$

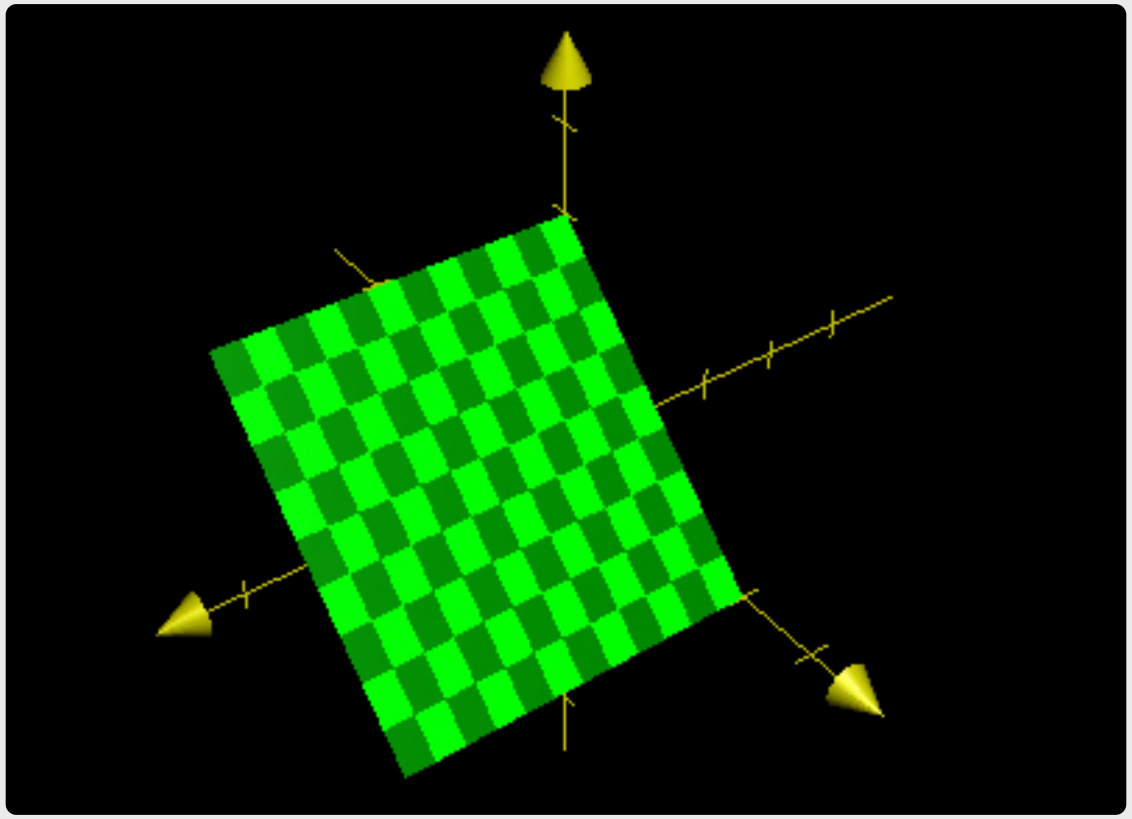
Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(3) Dado el campo $F(x, y, z) = (x - y,\, az,\, by)$ determinar la relación entre a y b para que sea nulo el flujo de F a través de $y + z = 3$ en el primer octante con $x \leq 2$.

Solución.

Comencemos por dibujar la superficie a través de la cual fluye el campo F. Evidentemente se trata de la parte del plano $y + z = 3$ que satisface $0 \leq x \leq 2$.

GALLERY 9.6 El plano a través del cual fluye F



No hace falta dibujar la normal pues si el flujo de F hacia un lado de la supeficie es nulo entonces lo es para el otro.

Evidentemente podemos proyectar esta superficie al plano xy para parametrizarla en la forma

$$\varphi(x, y) = (x,\ y,\ 3 - y), \qquad (x, y) \in [0,2] \times [0,3]\,.$$

Calculando tenemos

$$\varphi'_x = (1,\ 0,\ 0)$$

$$\varphi'_y = (0,\ 1, -1).$$

Luego

$$\vec{n} = \varphi'_x \wedge \varphi'_y = (0,\ 1,\ 1),$$

vector que podríamos dibujar sobre la superficie sin dificultad pero no es necesario pues si el flujo es nulo para un lado entonces lo es para el otro.

Ahora bien,

$$\iint_S F \cdot \vec{n}\ dS = \int\int_S (x - y,\ az,\ by) \cdot (0,1,1)\ dS =$$

$$\int_0^2\int_0^3 a(3-y) + by\ dy\ dx = \int_0^2\int_0^3 3a\ dy\ dx + (b-a)\int_0^2\int_0^3 y\ dy\ dx =$$

$$= 18a + (b-a)9 \Longrightarrow a + b = 0.$$

Es decir, para que el flujo de F a través de S sea nulo debe ser $a + b = 0$.

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(4) Sea $S \subset R^3$ la superficie descripta por

$$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + z^2 - 2z \leq 0,\ x \leq 0,\ y \leq 0.$$

Hallar el flujo a través de S del campo $F(x, y, z) = (x, y, z^2)$ con S orientada de manera que la coordenada y de su vector normal resulte positiva.

Solución.

Nuestra superficie es la parte del cilindro

$$x^2 + y^2 = 1$$

que satisface la condición

$$x^2 + z^2 - 2z \leq 0,\ x \leq 0,\ y \leq 0.$$

La curva intersección de $x^2 + y^2 = 1$ con $x^2 + z^2 - 2z = 0$ es evidentemente de importancia. Deducimos de estas dos condiciones que necesariamente

$$z^2 - 2z - y^2 = -1 \Longrightarrow z^2 - 2z + 1 = y^2.$$

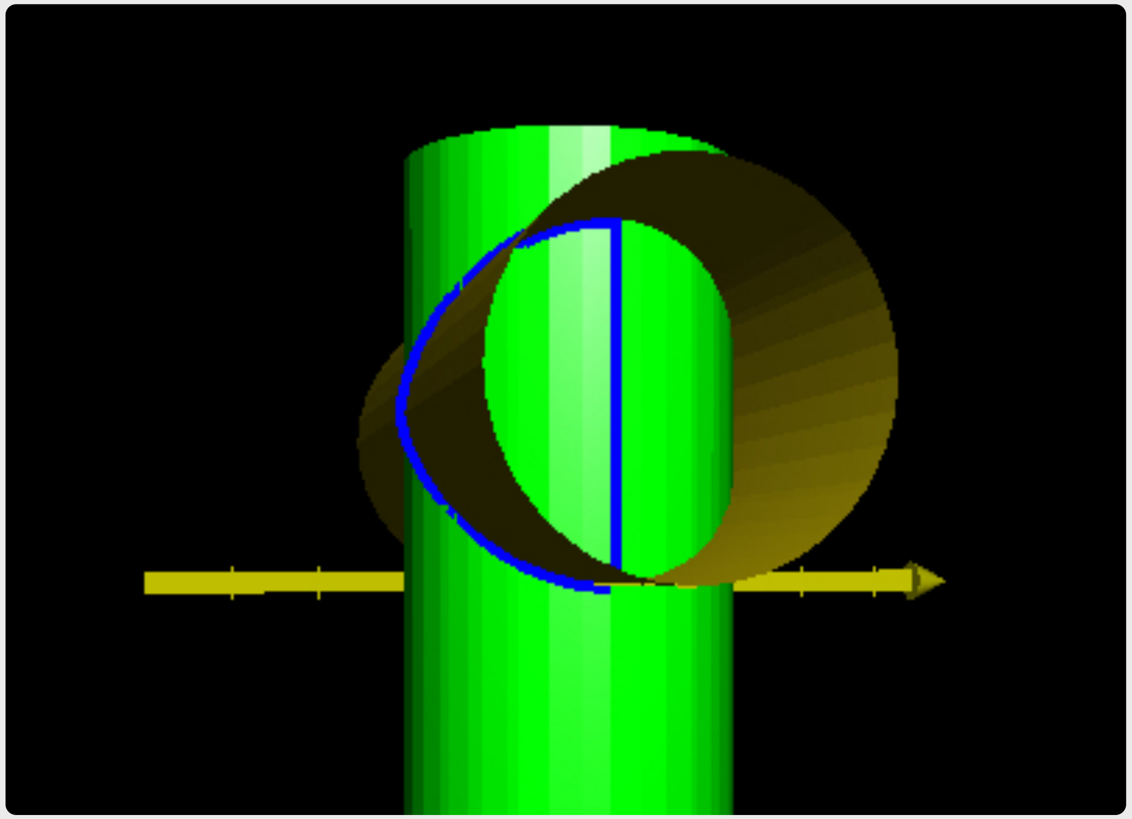
Luego

$$|z - 1| = |y|.$$

Recordando que $y \leq 0$ llegamos a

$$-y = |z - 1| \Longrightarrow y = -|z - 1|.$$

GALLERY 9.7 La superficie del ejercicio



La parte del cilindro verde acotada por la curva azul es nuestra superficie. A continuación, la curva azul que acota la superficie y su normal

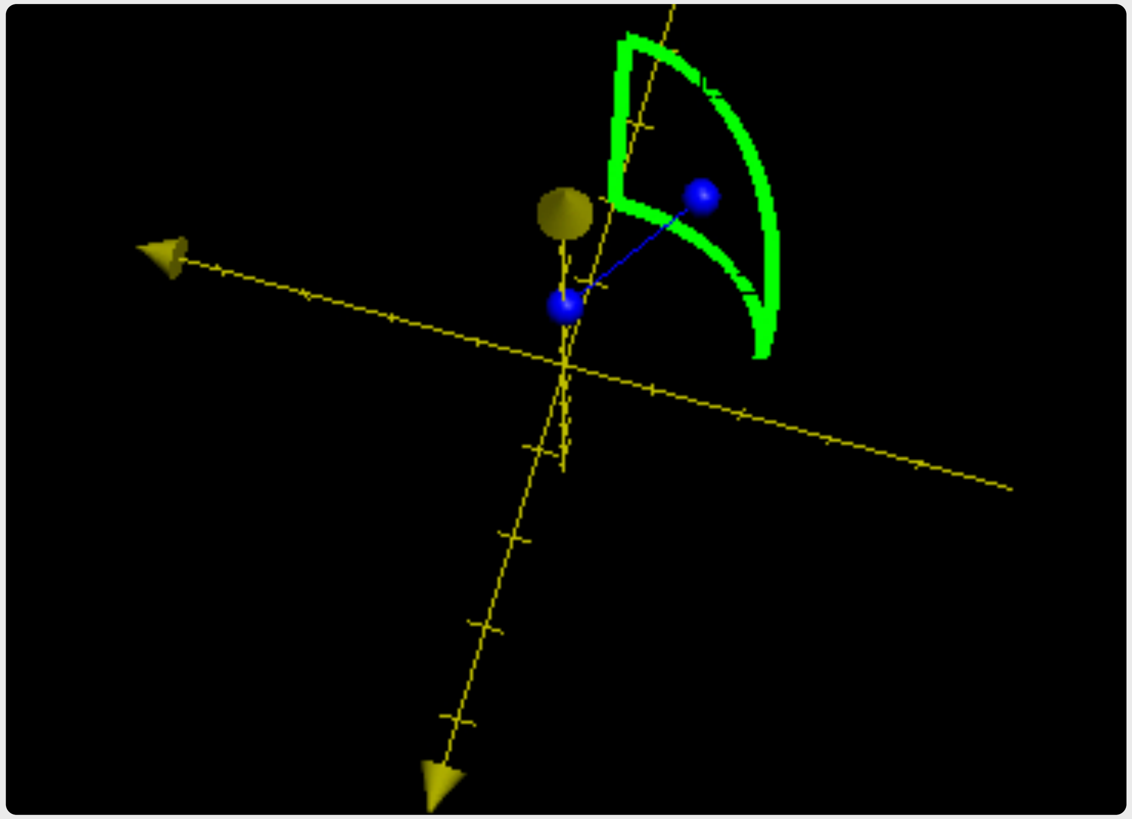
Luego la proyección sobre el plano yz es entonces la siguiente

$$D = \{(y,z) \in R^2 : -1 \leq y \leq 0,\ 1 + y \leq z \leq 1 - y\}.$$

Ahora bien, nuestra superficie se puede parametrizar entonces en la forma

$$\varphi(y,z) = (-\sqrt{1-y^2},\ y,\ z), \qquad (y,z) \in D\,.$$

GALLERY 9.8 Curva que acota nuestra superficie.



La curva que acota nuestra superficie y la normal que se pide en el ejercicio.

Calculando

$$\varphi'_y = (\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},\ 1,\ 0)$$

$$\varphi'_z = (\quad 0, \quad 0, \quad 1)$$

$$\overrightarrow{n} = (1, \ -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \ 0).$$

$$\iint_S F \cdot \overrightarrow{n} \ dS = \iint_S (x, y, z^2) \cdot (1, -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, \ 0) \ dS =$$

$$\int_{-1}^{0} \int_{y+1}^{1-y} -\sqrt{1-y^2} - \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}} \ dz \ dy =$$

$$\int_{-1}^{0} \int_{y+1}^{1-y} -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \ dz \ dy =$$

$$\int_{-1}^{0} \frac{2y}{\sqrt{1-y^2}} \ dy = -2.$$