CAPÍTULO 3

Funciones Diferenciables. Superficies.

En este importante capítulo presentamos el concepto de diferenciabilidad. Este concepto difiere del de Análisis Matemático I, porque allí diferenciable es equivalente a derivable mientras que aquí diferenciable sólo implica derivable. Estudiamos también el plano tangente a una función de dos variables y otros temas importantes.

SECCIÓN 1

Funciones Diferenciables.

CONTENIDOS

Esta sección fundamental nos presenta el concepto de diferenciabilidad. Como la definición de función diferenciable involucra un límite se comprende que está íntimamente ligada con el capítulo anterior.

La ecuación del plano tangente y sus ejercicios relacionados constituyen una parte importante del contenido de la materia.

Problemas.

(1) Analizar la **diferenciabilidad** de las siguientes funciones en los puntos indicados.

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución.

Recordemos que una función de dos variables se dice que es diferenciable en el punto (x_0, y_0) si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,.\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,.\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Para sintetizar los tres ítems observemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = 0.$$

Por ejemplo, para el ítem **(b)**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h{,}0) - f(0{,}0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

como ya hemos practicado en detalle en el capítulo anterior. Dejamos el resto de las derivadas parciales como un recomendable repaso. Ahora vayamos a cada ítem.

(a) En este ítem podemos proceder de una manera particular.

Sabemos que si una función es diferenciable en un punto (x_0, y_0) entonces en **continua** en dicho punto. Luego, por contrarrecíproco de la proposición anterior tenemos que si una función no es continua en un punto (x_0, y_0) entonces tampoco es **diferenciable** allí. Ahora bien, remitimos al lector al ejercicio **(1)(a)** de la sección anterior, donde hemos probado que $f(x,y)$ no es continua en (0,0). Luego la función tampoco es diferenciable en (0,0).

(b) Sustituyendo en la definición de **diferenciabilidad** anterior con $(x_0, y_0) = (0,0)$ obtenemos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,.\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,.\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

pero como las derivadas parciales ya sabemos que son 0 tenemos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

o sea

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Este límite se reconoce como los del capítulo anterior con h, k en lugar de x, y. Poniendo $h = k > 0$ tenemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{(2h^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^3}{2^{\frac{3}{2}}h^3} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} \neq 0.$$

Por lo tanto la función no es diferenciable en (0,0). Observemos que aquí no hubiese funcionado el contrarrecípro del ítem **(a)** pues esta función sí es continua en (0,0).

(c) Ahora tenemos que sustituir en

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,.\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,.\,k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

con la función de nuestro ítem que, al tener derivadas parciales en el origen nulas, se reduce a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^2k^2}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2}{(h^2+k^2)}\,.\,\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\,.\,k \;= 0$$

porque $0 \leq \dfrac{h^2}{h^2+k^2} \leq 1$ y $-1 \leq \dfrac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$ y todavía "nos queda" $k \to 0$.

(2) Analizar la diferenciabilidad en (0,0) de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución.

Debemos calcular previamente $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0{,}0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)$.

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h{,}0) - f(0{,}0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0{,}k) - f(0{,}0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^2 cos(\frac{1}{k^2})}{k} = 0.$$

Ahora bien, para ver si f es diferenciable en el origen hay que calcular

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h{,}0+k) - f(0{,}0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0{,}0)\,.\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)\,.\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k^2 cos(\frac{1}{h^2+k^2}) - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\,.\,k\,.\,cos(\frac{1}{h^2+k^2}) = 0$$

pues el primer y el tercer factor están acotados y el segundo tiende a 0.

Concluimos entonces que la función es diferenciable en (0,0). En símbolos $f \in Dif/(0{,}0)$.

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(3) Considere la superficie de ecuación $z = xy - x^2$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto (2,3,2).

Solución.

Este ejercicio no representa ninguna dificultad. Sólo nos permite repasar la ecuación del plano tangente a una superficie en un punto.

La ecuación del plano tangente al gráfico de una función diferenciable f en el punto (x_0, y_0) es

$$z = f(x_o, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

En nuestro caso

$$(x_0, y_0) = (2{,}3), \qquad f(2{,}3) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2{,}3) = y - 2x\,|_{(2,3)} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2{,}3) = x\,|_{(2,3)} = 2,$$

luego la ecuación del plano tangente pedido es

$$z = 2 + (-1)(x-2) + 2(y-3).$$

(4) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$ que pasa por el punto $(0, -1{,}1)$.

Solución.

Tenemos dos maneras de proceder. Lo haremos de ambas y mostraremos que se llega al mismo resultado.

La primera es hallando la superficie de nivel en cuestión, a saber

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = f(0, -1{,}1) = 0$$

de donde podemos despejar la z así

$$z = x^2 + y^2 = g(x, y).$$

Ahora, utilizando la ecuación del plano tangente a una función g de dos variables en el punto (x_0, y_0)

$$z = g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

obtenemos

$$z = 1 + 0(x-0) + (-2)(y+1) = 1 - 2(y+1).$$

La segunda es más potente pues no requiere que se pueda despejar una variable en función de otras dos. Recordamos que si $f \in Dif/(x_0, y_0)$ se llama gradiente de f en el punto (x_0, y_0) al vector

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right).$$

Análogamente para una función de tres variables

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right).$$

Ahora bien, una propiedad fundamental del gradiente es que este importante vector es perpendicular al conjunto de nivel que pasa por el punto en consideración. Luego el plano tangente en (x_0, y_0, z_0) al conjunto de nivel de f que pasa por dicho punto es

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) = 0$$

que en nuestro caso es

$$(x - 0, y + 1, z - 1) \cdot (0, -2, -1) = 0$$

que coincide con la primera solución ya que esto es igual a

$$-2(y + 1) - 1(z - 1) = 0.$$

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(5) Hallar los puntos donde el plano normal a la curva intersección de las superficies $z = 5 - y^2$, $x = y + 1$ es paralelo la plano tangente a la superficie $x^2 + 3xy + y^2 - z = 0$ en el punto $(1,1,5)$.

Solución.

Comenzamos por calcular el plano tangente a la superficie $x^2 + 3xy + y^2 - z = 0$ en el punto $(1,1,5)$.

El vector normal del plano en cuestión es el gradiente de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + 3xy + y^2 - z$$

en el punto $(1,1,5)$.

Calculando obtenemos

$$\nabla f(1,1,5) = (2x + 3y, 3x + 2y, -1)\,|_{(1,1,5)} = (5,\ 5,\ -1).$$

El plano tangente a la superficie en el punto $(1,1,5)$ es entonces

$$(x - 1, y - 1, z - 5) \cdot (5,\ 5,\ -1) = 0.$$

Ahora, la curva se puede parametrizar en la forma

$$c(y) = (y + 1,\ y,\ 5 - y^2)$$

cuyo vector tangente es

$$c'(y) = (1,1,-2y).$$

Pretendemos hallar los valores de y tales que

$$(5,5,-1) = \lambda \,.\, (1,1,-2y).$$

pues esta es la condición de paralelismo entre dos vectores. Esto conduce al sistema

$$\begin{cases} 5 = \lambda \\ 5 = \lambda \\ -1 = -2\lambda y \end{cases}$$

del cual obtenemos $y = \dfrac{1}{10}$. Luego el punto de la curva que satisface el enunciado es

$$c\left(\frac{1}{10}\right) = \left(\frac{11}{10}, \frac{11}{10}, \frac{499}{100}\right).$$

(6) Hallar la **derivada direccional** de la función $f(x,y) = x^2y + y^2$ en el punto $(1,-1)$ en la dirección del vector que forma un ángulo de $30°$ con el eje x.

Solución.

Como la función es diferenciable en el punto $(1,-1)$ por ser una función $C^1/(1,-1)$ podemos aplicar la notable fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v.$$

Ahora bien,

$$\nabla f(1,-1) = (2xy, x^2 + 2y)\big|_{(1,-1)} = (-2,-1).$$

Por otro lado, un versor que forma un ángulo de $30°$ con el eje de las x es

$$v = (cos30°, sen30°) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Luego, la respuesta a este sencillo ejercicio es

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,-1) = (-2,-1) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - \frac{1}{2}.$$

(7) Sea f una función diferenciable tal que $\dfrac{\partial f}{\partial v_1}(a,b) = \sqrt{2}$ siendo $v_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$. Además $\dfrac{\partial f}{\partial v_2}(a,b) = \sqrt{5}$ siendo $v_2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Hallar la dirección en la cual la **derivada direccional** de f en (a,b) es mínima y el valor de dicha derivada.

Solución.

Como la función es **diferenciable** en (a,b) vale la fórmula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a,b) = \nabla f(a,b) \cdot v.$$

Para abreviar, llamemos en este ejercicio $\nabla f(a,b) = (\alpha,\beta)$. Con esto, los datos del ejercicio nos proporcionan el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} (\alpha,\beta)(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} \\ (\alpha,\beta)(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta = 5 \end{cases}$$

De aquí deducimos que $\alpha = 3$, $\beta = 1$. Es decir

$$\nabla f(a,b) = (3,1).$$

Ahora bien, sabemos que la derivada direccional de una función diferenciable en un punto (a,b) es máxima en la dirección de su gradiente allí y su valor es precisamente la norma de dicho gradiente. Simétricamente, la derivada direccional es mínima en la dirección del gradiente pero en sentido opuesto y vale “menos la norma” de dicho gradiente. Por lo tanto la derivada direccional es mínima en la dirección

$$v = (\frac{-3}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}})$$

y el valor de dicha derivada mínima es

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a,b) = - \parallel (3,1) \parallel = -\sqrt{10}.$$

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

SECCIÓN 2

Superficies.

Contenidos

1. Superficies parametrizadas
2. Plano tangente a superficies dadas en forma paramétrica
3. Parametrización de superficies dadas en forma cartesiana

En esta sección comenzamos a familiarizarnos con el concepto de parametrización de superficies. El contenido de esta sección es fundamental para futuros capítulos, por ejemplo, el capítulo sobre integrales de superficie y el clímax de la materia : los teoremas de Stokes y Gauss.

Problemas.

(1) Dada la parametrización de una superficie Σ,

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D$$

y un punto $Q_0 \in \Sigma$, se pide en cada caso:

(a) Hallar $(u_0, v_0) \in D : X(u_0, v_0) = Q_0$

(b) Obtener una ecuación de Σ en coordenadas cartesianas

(c) Dibujar la superficie

(d) Hallar una ecuación vectorial del plano tangente a Σ en Q_0.

i) (paraboloide)

$$X(u,v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad D = \{(u,v) : u^2 + v^2 \le 9\}, \quad Q_0 = (0,2,4)$$

ii) (cono)

$$X(u,v) = (v\ cos(u), 2v, v\ sen(u)), \quad D = \{(u,v) : 0 \le u \le \pi\ \wedge\ 0 \le v \le 3\}$$
$Q_0 = (0,4,2)$.

Solución.

Resolvemos los cuatro ítems en simultáneo.

(i) Como debemos hallar $(u_0, v_0) \in D : X(u_0, v_0) = Q_0$

$$(u_0, v_0, u_0^2 + v_0^2) = (0,2,4)$$

obtenemos trivialmente que $(u_0, v_0) = (0,2)$

Para hallar la ecuación de Σ en coordenadas cartesianas tenemos

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases}$$

Luego, sustituyendo las dos primera ecuaciones en la segunda obtenemos

$$z = x^2 + y^2.$$

Pero esta ecuación sin restricciones describe todo el paraboloide y nosotros necesitamos sólo la parte correspondiente en coordendas cartesianas a $u^2 + v^2 \le 9$. Luego debemos aclarar en la ecuación anterior que $x^2 + y^2 \le 9$.

Repasemos ahora como se halla la ecuación vectorial del plano tangente a una superficie parametrizada

$$X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u_0, v_0) \in D.$$

Esta ecuación se define por

$$r(s,t) = X(u_0, v_0) + s\,.\,X'_u(u_0, v_0) + t\,.\,X'_v(u_0, v_0)$$

donde

$$X'_u(u,v) = (x'_u(u,v), y'_u(u,v), z'_u(u,v))$$

$$X'_v(u,v) = (x'_v(u,v), y'_v(u,v), z'_v(u,v)).$$

Calculando tenemos

$$X'_u(u,v) = (1{,}0{,}2u) \qquad\qquad X'_v(u,v) = (0{,}1{,}2v)$$

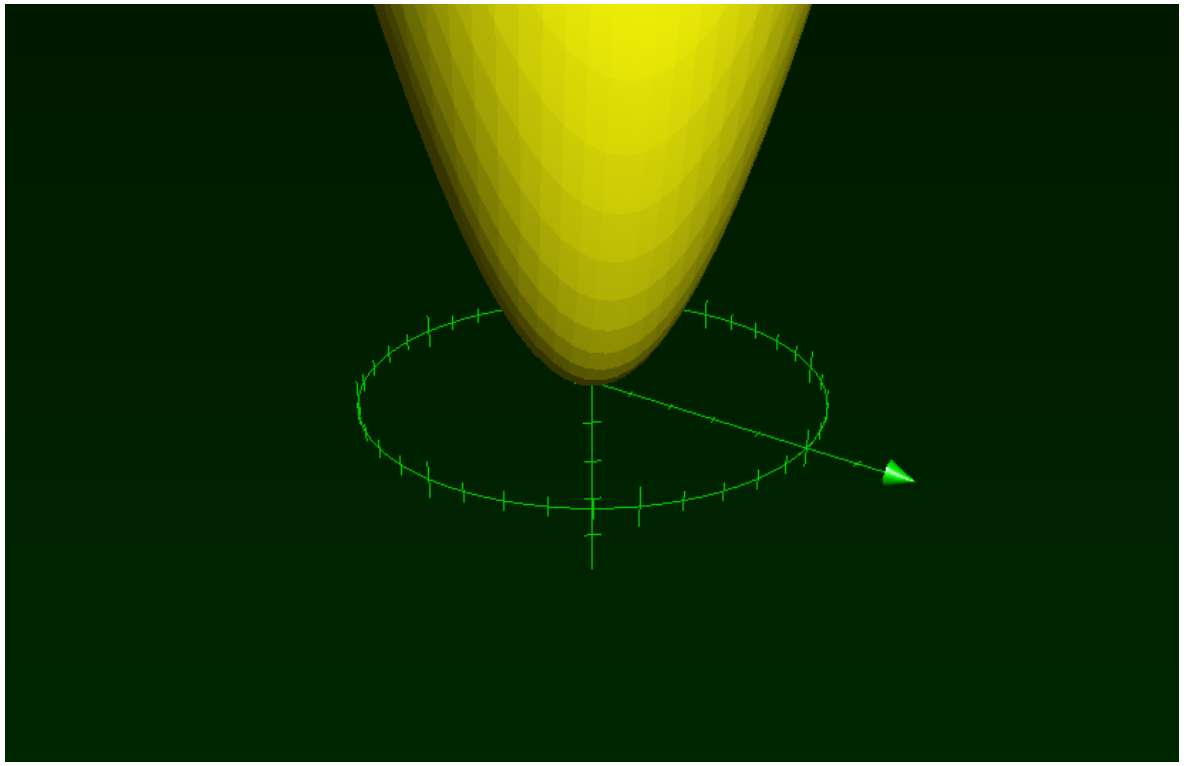
de lo cual evaluando en $(0{,}2)$

$$X'_u(0{,}2) = (1{,}0{,}0) \qquad\qquad X'_v(0{,}2) = (0{,}1{,}4).$$

Por lo tanto, la ecuación vectorial del plano tangente en el punto pedido es

$$r(s,t) = (0{,}2{,}4) + s\,.\,(1{,}0{,}0) + t\,.\,(0{,}1{,}4).$$

El gráfico de esta superficie lo vemos en la siguiente figura donde prestamos especial atención a que no es todo el paraboloide sino la parte ya indicada de variación de u y v.



(ii) Ahora debemos hallar $(u_0, v_0) \in D : X(u_0, v_0) = Q_0$

$$X(u,v) = (v\ cos(u), 2v, v\ sen(u)) = (0{,}4{,}2).$$

De aquí obtenemos

$$v_0 = 2 \qquad \wedge \qquad u_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Para hallar la ecuación de Σ en coordenadas cartesianas consideremos el sistema

$$\begin{cases} x = v\ cos(u) \\ y = 2v \\ z = v\ sen(u) \end{cases}$$

De la primera y la tercera obtenemos elevando al cuadrado

$$x^2 + z^2 = v^2,$$

luego sustituyendo en la segunda obtenemos

$$y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$$

con $x^2 + z^2 \leq 9 \quad \wedge \quad z \geq 0$. Estas inecuaciones se obtienen de la variación original de u, v.

Para el plano tangente tenemos, análogamente a lo explicado en la parte (i)

$$X'_u(u, v) = (-v\ sen(u),\ 0,\ v\ cos(u))$$
$$X'_v(u, v) = (cos(u),\ 2,\ sen(u)).$$

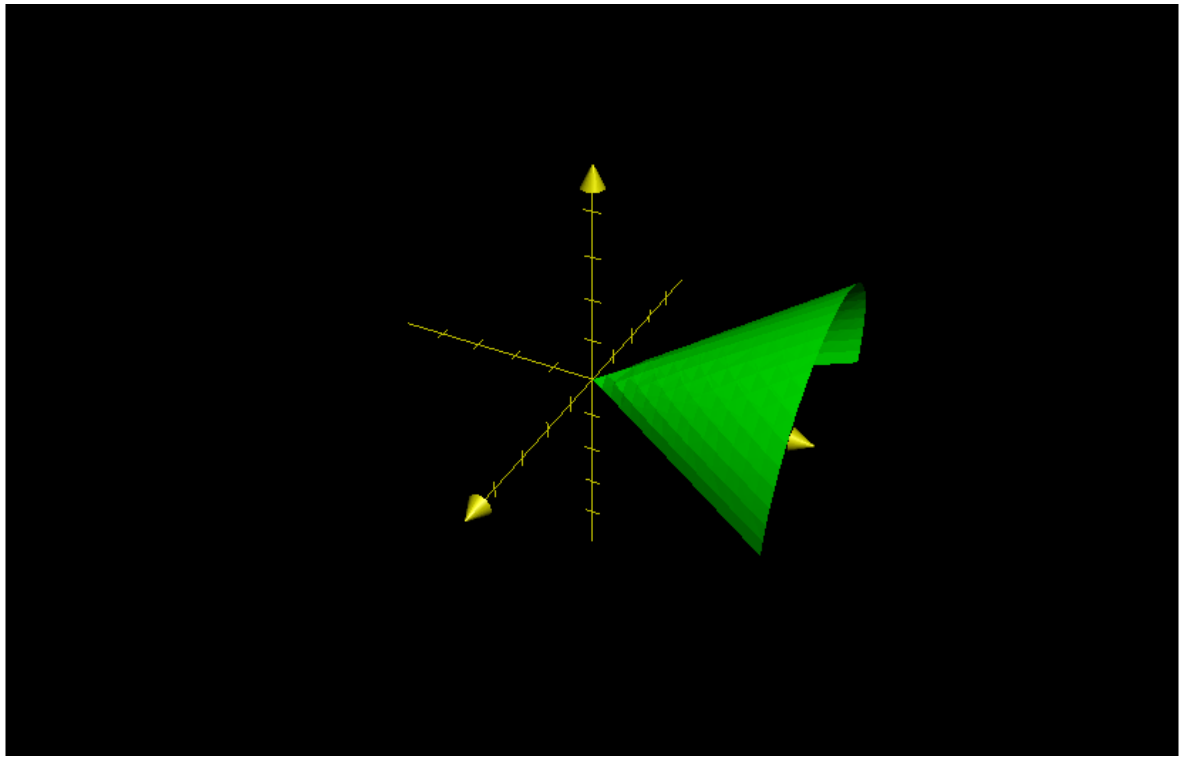
Evaluando en $v_0 = 2,\ u_0 = \dfrac{\pi}{2}$ obtenemos

$$X'_u(\frac{\pi}{2},2) = (-2,0,0) \qquad X'_v(\frac{\pi}{2},2) = (0,2,1),$$

entonces la ecuación una ecuación vectorial del plano tangente en el punto pedido es

$$r(s, t) = (0,4,2) + s\,.\,(-2,0,0) + t\,.\,(0,2,1).$$

Finalmente la gráfica de Σ es la siguiente.



(2) Sean las superficies :

$\Sigma_1 : X(u, v) = (cos(u),3\ sen(u), v),\ (u, v) \in [\pi,2\pi] \times [0,5]$

$\Sigma_2 : z = 4 - x^2 - y^2 - 2y.$

Hallar los puntos de Σ_1 para los cuales el plano tangente a dicha superficie es paralelo al plano tangente a Σ_2 en el punto $(0,0,4)$.

Solución.

En este ejercicio debemos tratar a las dos superficies de manera distinta, pues una está dada en forma paramétrica y la otra en forma cartesiana. Nos interesan los vectores normales a los planos tangentes considerados.

Un vector normal a Σ_2 en $(0,0,4)$ es el gradiente de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2y + z - 4$ en dicho punto pues Σ_2 es exactamente el conjunto de nivel 0 de dicha función f. Calculando tenemos

$$\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y + 2, 1) \implies \nabla f(0,0,4) = (0,2,1).$$

Para Σ_1 el vector normal en el punto $X(u,v)$ está dado por el producto vectorial

$$N = X'_u(u,v) \times X'_v(u,v).$$

Ahora bien,

$$X'_u(u,v) = (-sen(u), 3\ cos(u), 0)$$

$$X'_v(u,v) = (0,0,1).$$

Entonces

$$N = (3\ cos(u), sen(u), 0).$$

Por lo tanto, para que los dos planos tangentes sean paralelos debemos tener

$$(3\ cos(u), sen(u), 0) = \lambda . (0,2,1).$$

Pero esta igualdad es imposible pues la tercera componente implica $\lambda = 0$. Eso implica en la segunda $u = \pi \quad \vee \quad u = 2\pi$. Pero esos valores de u producen contradicción en la primera componente.

Este resultado se puede prever analizando cada superficie por separado : Σ_1 es un cilindro elíptico vertical mientras que Σ_2 es un paraboloide.

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.