Capítulo 4

# Funciones Compuestas.

En este capítulo trabajaremos con funciones compuestas. Aprendemos el equivalente multidimensional de la "regla de la cadena" que en varias variables adquiere una dimensión mucho más grande que en una variable.

SECCIÓN 1

# Composición de funciones.

CONTENIDOS

1. Funciones compuestas.
2. Expresión de la función compuesta.

En esta sección muy breve repasamos el concepto de composición de funciones preparando el terreno para la derivación de las mismas.

Debemos prestar especial atención a las dimensiones de los dominios y codominios porque nos permitirá evitar errores en la siguiente sección.

## Problemas.

**(1)** Determinar dos funciones $g : R^2 \to R, \quad h : R \to R$ tales que $f = h \circ g$ si

$$f(x, y) = ln(x^2 - sen(y) + 2).$$

**Solución.**

Si definimos $g(x, y) = x^2 - sen(y) + 2 \quad , \quad h(x) = ln(x)$ entonces por definición de composición $h \circ g$ tenemos

$$(h \circ g)(x, y) = h[g(x, y)] = h(x^2 - sen(y) + 2) = ln(x^2 - sen(y) + 2)\,.$$

**(2)** Determinar dos funciones $g : R^2 \to R,\ h : R^2 \to R^2$ tales que $f = g \circ h$ si

$$f(x, y) = \sqrt{|x + y| + (x^2 + y^3)^2}.$$

**Solución.**

Supongamos que definimos

$$h(x, y) = (|x + y|, x^2 + y^3)$$

$$g(u, v) = \sqrt{u + v^2}$$

entonces

$$f(x, y) = (g \circ h)(x, y) = g[h(x, y)] = g(|x + y|, x^2 + y^3)$$

$$= \sqrt{|x + y| + (x^2 + y^3)^2}.$$

Notemos que la solución de este ejercicio no es única. Nuestra "factorización $f = g \circ h$" podría haber sido por ejemplo

$$h(x, y) = (|x + y|, (x^2 + y^3)^2)$$

$$g(u, v) = \sqrt{u + v}$$

llegando al mismo resultado.

Sección 2

# Regla de la cadena.

## Contenidos

1. Derivación de funciones compuestas.
2. Derivadas, Gradientes y Jacobianos.
3. Regla mnemotécnica : “Arbolito”.

En esta sección practicamos cómo se deriva una función de varias variables compuestas en términos de las derivadas de las funciones componentes.

Es una sección importantísima ya que muchos ejercicios de examen contienen ejercicios de este tema. Al contrario que en la regla de la cadena de Análisis I podemos encontrar alguna dificultad en los ejercicios.

**Problemas.**

**(1)** Dado $A = (x_0, y_0)$ y $h = f \circ g$ calcular $\nabla h(A)$ en los siguientes casos :

**(a)** $A = (0,1),\ f(u,v) = \sqrt{u/v}$ y

$$g(x,y) = (1 + ln(x+y), cos(xy))\,.$$

**(b)** $A = (1,0),\ g(x,y) = (x, xe^{y^2}, x - y)$

$$\nabla f(1,1,1) = (3,1,2) \quad \text{siendo} \quad f \in C^1(R^3).$$

**Solución.**

**(a)** Observamos primero que la función $f$ depende de las variables $u,\ v$ y que al componer $f$ con $g$ las variables $u,\ v$ pasan a depender de $x,\ y$.

Entonces, como la función vectorial $g(x,y)$ es diferenciable en el punto $(0,1)$ y la función $f$ es diferenciable en el punto $g(0,1) = (1,1)$ podemos aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}[g(x_0,y_0)]\,.\,\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}[g(x_0,y_0)]\,.\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\,.$$

En nuestro caso

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial u}(1,1)\,.\,\frac{\partial u}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial f}{\partial v}(1,1)\,.\,\frac{\partial v}{\partial x}(0,1)\,.$$

Ahora bien,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{uv}} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{-1\sqrt{u}}{2(\sqrt{v})^3},$$

que evaluadas en $(u,v) = (1,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,1) = \frac{1}{2} \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial v}(1,1) = \frac{-1}{2}.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x+y} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\,y\ sen(xy)$$

que evaluadas en $(x,y) = (0,1)$ dan

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,1) = 1 \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x}(0,1) = 0.$$

Con todo esto llegamos a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{2}.1 + \frac{-1}{2}.0 = \frac{1}{2}\,.$$

Análogamente, con respecto a $y$ obtenemos

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial u}[g(x_0, y_0)] \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial v}[g(x_0, y_0)] \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\,.$$

En nuestro caso

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial u}(1,1) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}(0,1) + \frac{\partial f}{\partial v}(1,1) \cdot \frac{\partial v}{\partial y}(0,1)\,.$$

Sólo hace falta calcular

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x+y} \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -x\ sen(xy)$$

que evaluadas en $(x, y) = (0,1)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,1) = 1 \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial x}(0,1) = 0.$$

Con todo esto llegamos a

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,1) = \frac{1}{2}.1 + \frac{-1}{2}.0 = \frac{1}{2}\,.$$

Por lo tanto tenemos

$$\nabla h(0,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

**(b)** Este ítem es más interesante porque mientras en el anterior podríamos haber compuesto explícitamente $f$ con $g$ y después derivar parcialmente, aquí esto es imposible por no tener explícitamente la función $f$, sino sólo su gradiente.

En este caso la función $f$ depende de tres variables. Llamémoslas $u, v, w$. Entonces al componer $f$ con $g$ estas tres variables pasan a depender de $x, y$. Luego aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = {} & \frac{\partial f}{\partial u}[g(x_0, y_0)] \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \\ & \frac{\partial f}{\partial v}[g(x_0, y_0)] \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \\ & \frac{\partial f}{\partial w}[g(x_0, y_0)] \cdot \frac{\partial w}{\partial x}(x_0, y_0)\,.\end{aligned}$$

Como $(x_0, y_0) = (1,0)$ y $g(1,0) = (1,1,1)$ la igualdad anterior resulta, teniendo en cuenta que por dato del ejercicio $\nabla f(1,1,1) = (3,1,2)$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = 3.\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) + 1.\frac{\partial v}{\partial x}(1,0) + 2.\frac{\partial w}{\partial x}(1,0).$$

Calculando las derivadas que faltan

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = e^{y^2} \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = 1$$

obtenemos luego de evaluar en $(x, y) = (1,0)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 1 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 1 \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(1,0) = 1.$$

Por lo tanto, sustituyendo

$$\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = 3.1 + 1.1 + 2.1 = 6.$$

Procediendo análogamante con respecto a $y$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1,0) = 3.\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) + 1.\frac{\partial v}{\partial y}(1,0) + 2.\frac{\partial w}{\partial y}(1,0).$$

Los cálculos análogos dan ahora

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = 2xye^{y^2} \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = -1$$

y evaluados en $(x, y) = (1,0)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 0 \qquad \frac{\partial w}{\partial x}(1,0) = -1.$$

Por lo tanto, sustituyendo

$$\frac{\partial h}{\partial y}(1,0) = 3.0 + 1.0 + 2.(-1) = -2.$$

Con esto, la respuesta final del ejercicio resulta

$$\nabla h(1,0) = (6, -2).$$

**(2)** Sea $f : R^3 \to R$ **diferenciable** tal que

$$\nabla f(1,0,0) = (-2,3,1)\,.$$

Sea $h(t) = f(t, ln(t), t^2 - 1)$. Hallar $h'(1)$.

**Solución.**

La función $f$ depende de tres variables. Llamémoslas $x, y, z$. Entonces, aplicando la regla de la cadena tenemos

$$h'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} . x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} . y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z} . z'(t).$$

Observamos que si

$$x(t) = t, \quad y(t) = ln(t), \quad z(t) = t^2 - 1$$

entonces

$$x(1) = 1, \quad y(1) = 0, \quad z(1) = 0$$

y derivando

$$x'(t) = 1, \quad y'(t) = \frac{1}{t}, \quad z(t) = 2t$$

que evaluando en $t = 1$

$$x'(1) = 1, \quad y'(1) = 1, \quad z'(1) = 2.$$

Por lo tanto, la respuesta al ejercicio es

$$h'(1) = (-2).1 + 3.1 + 1.2 = 3.$$

**(3)** Dada $w = e^{x-y} - z^2 y + x = f(x, y, z)$ con

$$x = u - v, \qquad y = u + u^3 ln(v - 1), \qquad z = uv$$

hallar la dirección de máxima derivada direccional

de $w = w(u, v)$ en (1,2) y el valor de dicha derivada.

**Solución.**

Observamos que en $(u, v) = (1,2)$ las funciones $x(u, x)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ son diferenciables y que la función $w$ es **diferenciable** en todo $R^3$. Luego la función compuesta $w((x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ es diferenciable en $(u, v) = (1,2)$. Con estas hipótesis podemos aplicar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Calculando

$$\frac{\partial w}{\partial u}(1,2) = (e^{x-y} + 1)\,|_{(-1,1,2)} .1\,|_{(1,2)} +$$

$$(e^{x-y} . (-1) - z^2)\,|_{(-1,1,2)} . (1 + 3u^2 ln(v - 1))\,|_{(1,2)} +$$

$$(-2zy)\,|_{(-1,1,2)} . v\,|_{(1,2)} =$$

$$(e^{-2} + 1) \; + \; (-e^{-2} - 4).1 \; + \; (-4).2 = -11.$$

Análogamente

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Calculando

$$\frac{\partial w}{\partial v}(1{,}2) = (e^{x-y}+1)\,|_{(-1,1,2)} \,.\, (-1)\,|_{(1,2)} +$$

$$(e^{x-y}\,.\,(-1) - z^2)\,|_{(-1,1,2)} \,.\, (\frac{u^3}{v-1})\,|_{(1,2)}$$

$$(-2zy)\,|_{(-1,1,2)} \,.\, u\,|_{(1,2)} =$$

$$(e^{-2}+1)\,.\,(-1) \;+\; (-e^{-2}-4) \;+\; (-4).1 = -2e^{-2} - 9.$$

Ahora bien, sabemos que la dirección de derivada máxima de una función diferenciable en un punto se toma en la dirección del gradiente en ese punto y su valor es la norma de dicho gradiente. Luego, la respuesta al ejercicio es

dirección de derivada máxima :

$$V = \frac{(-11, -2e^{-2} - 9)}{\|\,(-11, -2e^{-2} - 9)\,\|}$$

valor de dicha derivada máxima :

$$\frac{\partial w}{\partial V} = \|\,(-11, -2e^{-2} - 9)\,\|.$$

Se puede ver una solución on-line clickenado **aquí**.

**(4)** Dadas $f(x, y) = (ln(y), xy^4 - 3x^2y)$ y $g : R^2 \to R^2$ $C^1(R^2)$ tal que

$$Dg(0, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular $D(g \circ f)(1{,}1)$.

**Solución.**

Observamos que $f(1{,}1) = (0, -2)$. Notamos también que las función $g \in Dif(R^2)$ por ser $C^1(R^2)$ y que la función $f \in Dif/(1{,}1)$. Luego la función $g \circ f \in Dif/(1{,}1)$ y se puede aplicar la regla de la cadena para obtener

$$D(g \circ f)(1{,}1) = Dg[f(1{,}1)]\,.\,Df(1{,}1).$$

$$= Dg(0, -2)\,.\,Df(1{,}1).$$

Por definición, tenemos

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}(x,y),$$

donde hemos supuesto que $f(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$.

Calculando esta última matriz tenemos

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{y} \\ y^4 - 6xy & 4xy^3 - 3x^2 \end{pmatrix}$$

que evaluada en $(x,y) = (1,1)$ resulta

$$Df(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, usando el dato del ejercicio para $Dg(0,-2)$ obtenemos el resultado final

$$D(g \circ f)(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -25 & 5 \end{pmatrix}.$$

**(5)** Sea $F : R^2 \to R^2, \quad F(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ una función biyectiva y $C^2(R^2)$ que satisface

$$DF(1,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y que $F(1,-2) = (1,2)$.

**(a)** Hallar un vector tangente en $(1,2)$ de la curva imagen por $F$ de la circunferencia de ecuación $u^2 + v^2 = 5$.

**(b)** Hallar un vector tangente en $(1,-2)$ de la pre-imagen por $F$ de la recta de ecuación $y = 2x$.

**Solución.**

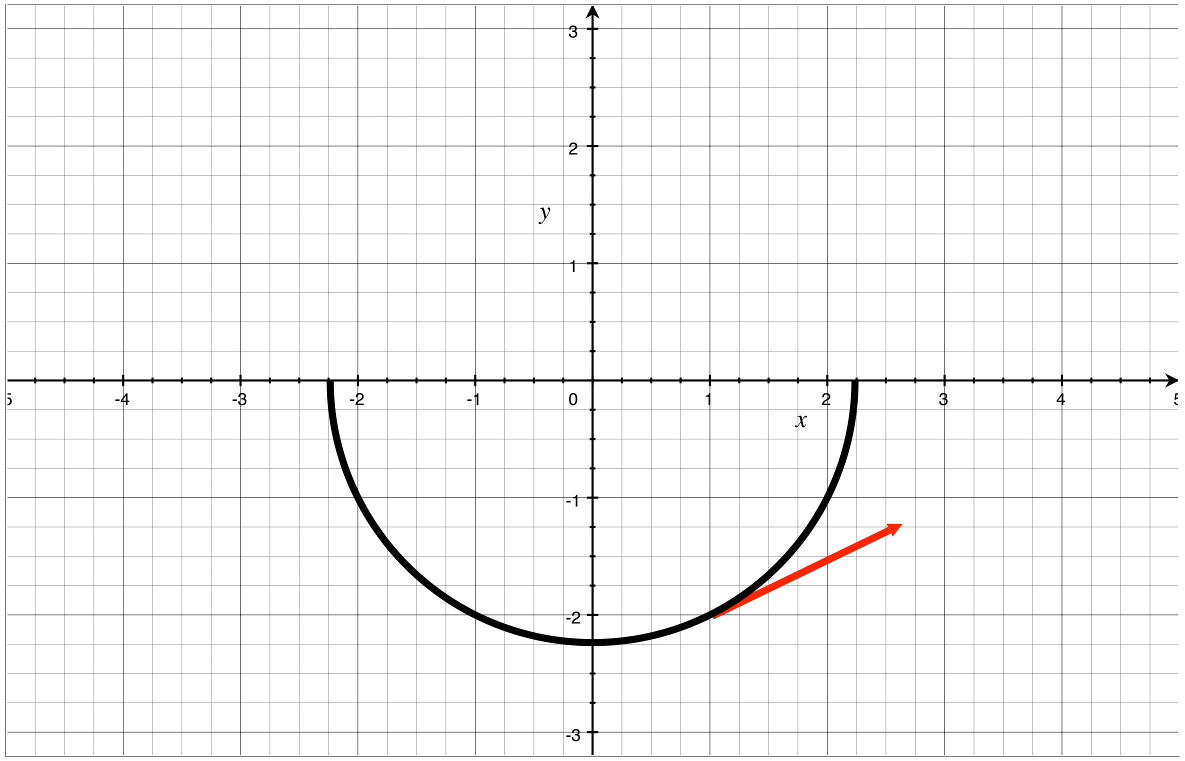
Hay varias maneras de resolver este ejercicio. Entre ellas hay dos que nos parecen interesantes. La primera explica y repasa claramente conceptos de esta unidad y por eso la hemos elegido. Y la segunda lo resuelve casi sin esfuerzo invocando una importante propiedad de $F$.

**Primera solución (a mano).**

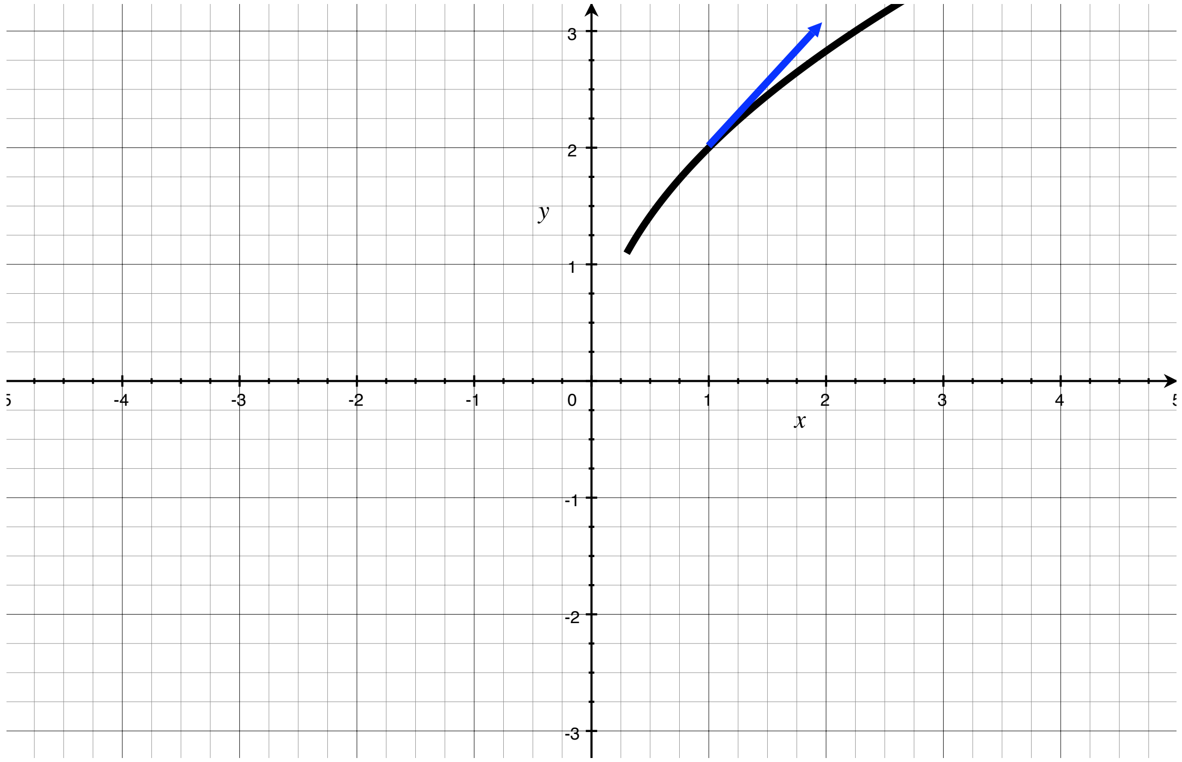
Consideremos la circunferencia $u^2 + v^2 = 5$. Nos interesa particularmente el punto $(1,-2)$ así que parametrizaremos la parte inferior de la misma en la forma

$$c(u) = (u, -\sqrt{5 - u^2}), \quad -\sqrt{5} \le u \le \sqrt{5}.$$

La ventaja de esta forma es que el parámetro es la abscisa y entonces es fácil hallar el valor de $u$ tal que $c(u) = (1,2)$, a saber : $u = 1$.




La curva imagen por $F$ de nuestra circunferencia no es posible hallarla, porque no tenemos explícitamente a $F$. Sólo sabemos que $F(1, -2) = (1,2)$. Pero esto no significa que no podamos razonar como si efectivamente la tuviéramos. Podría ser por ejemplo la curva siguiente.




Esta curva tiene la parametrización $\gamma(u) = F(c(u))$, pues es precisamente la imagen por $F$ de la circunferencia que nos dieron. (En realidad sólo de la parte inferior, pero esto alcanza para responder a lo que se pide).

Ahora bien,

$$\gamma(u) = F(c(u)) = (x(u, -\sqrt{5 - u^2}), y(u, -\sqrt{5 - u^2})),$$

por lo tanto sólo hace falta calcular $\gamma'(1)$.

Como $\gamma'(u) = (\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u})$ tenemos

$$\gamma'(1) = \left(1 + (-1) \, . \frac{u}{\sqrt{5-u^2}}, \, 2 + 1 . \frac{u}{\sqrt{5-u^2}}\right)\Bigg|_{u=1}$$

de lo que resulta

$$\gamma'(1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

**Segunda solución (tangentes en tangentes).**

Esta solución es más sencilla pero utiliza una propiedad de la teoría que dice que si $V$ es un vector tangente a una curva $C$ y si $F$ es biyectiva y $C^1$ entonces el vector $D(F) \, . \, V$ es tangente a la imagen por $F$ de $C$.

Luego, aplicando esta teoría calculemos un vector tangente a $C$. Obviamente $c'(1) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ sirve. Entonces un vector tangente a la imagen de $C$ bajo $F$ en el punto $(1{,}2)$ resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}.$$

**(b)** Para resolver este ítem debemos observar que si $F$ es biyectiva con matriz Jacobiana en el punto $(1, -2)$ igual a

$$DF(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces como $F(1, -2) = (1{,}2)$ la matriz Jacobiana de la función $F^{-1}(1{,}2)$ es precisamente

$$[DF(1, -2)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Por supuesto que un vector tangente a $y = 2x$ en el punto $(1{,}2)$ es $V = (1{,}2)$ ya que una parametrización de esta recta es $\delta(t) = (t, \, 2t)$.

Luego, aplicando la segunda solución anterior a la función $F^{-1}$ en el punto $(1{,}2)$ tenemos como respuesta que un vector tangente a la pre-imagen pedida en el punto pedido es

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$