Capítulo 5

Funciones Implícitas.

En este capítulo presentamos el concepto de función implícita. Esta idea nos ayuda a obtener derivadas de funciones que no podemos conocer explícitamente, pero su aplicación se extiende más allá. Por ejemplo, nos permite definir curvas como intersección de superficies. Veremos también otros usos de esta idea.

SECCIÓN 1

Funciones implícitas.

CONTENIDOS

1. Teorema de la función implícita.
2. Primeros casos del teorema.
3. Derivadas parciales de funciones dadas implícitamente.

En esta primera sección trabajamos con los primeros casos del teorema de la función implícita. En los cursos elementales de análisis I este tema se reduce sencillamente a algún cálculo de derivadas. Aquí veremos cosas más profundas.

Comenzamos por estudiar los casos el los que se define una sola variable en función de otras, dejando para la siguiente sección el caso en que se define más de una variable.

Problemas.

(1) Verificar las hipótesis del teorema de la función implícita para asegurar que las siguientes ecuaciones definen a $z = f(x, y)$ en un entorno del punto A y calcular $\nabla f(A)$ en los siguientes casos.

(a) $z = 2 - ln(z + 3x - y^2), \quad A = (1,2)$

(b) $z - xv + y^2 = 0, \quad A = (1,0), \quad$ con

$$v = h(x, y) \text{ tal que } \quad xv + ye^{yv} = 0.$$

Solución.

Comenzamos por definir la función

$$F(x, y, z) = z + ln(z + 3x - y^2) - 2.$$

Consideremos ahora la superficie de nivel 0 de F.

En esta superficie si $\quad x = 1,\ y = 2 \quad$ tenemos

$$F(1,2,z) = z + ln(z + 3 - 4) - 2 = 0.$$

Una posibilidad para z es entonces $z = 2$.

Definimos entonces $f(1,2) = 2$.

Para verificar ahora el teorema de la función implícita observamos que

1. $F \in C^1(1,2,2)$

2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,2,2) = 1 + \dfrac{1}{z + 3x - 4}\Big|_{(1,2,2)} = 2 \neq 0.$

Entonces $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $A = (1,2)$.

Calculemos ahora $\nabla f(A)$. Para ello necesitamos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2).$$

Ahora bien, la fórmula para este cálculo en términos de F es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{F'_x}{F'_z}\Big|_{(1,2,2)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\frac{F'_y}{F'_z}\Big|_{(1,2,2)}.$$

Luego

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{\frac{3}{z + 3x - y^2}}{1 + \frac{1}{z + 3x - y^2}}\Bigg|_{(1,2,2)} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -\left.\frac{\frac{-2y}{z+3x-y^2}}{1+\frac{1}{z+3x-y^2}}\right|_{(1,2,2)} = \frac{4}{2} = 2.$$

Por lo tanto el gradiente pedido es

$$\nabla f(1,2) = \left(-\frac{3}{2},2\right).$$

(b) En este ejercicio podemos despejar z para obtener

$$z = xv - y^2 = f(x,y).$$

Entonces, como v depende de x e y tenemos

$$f'_x(x,y) = v(x,y) + x\,.\,v'_x(x,y)$$

$$f'_y(x,y) = x\,.\,v'_y(x,y) - 2y.$$

Ahora bien, de $xv + ye^{yv} = 0$ obtenemos que si $(x,y) = (1,0)$ entonces $v = 0$.

Verifiquemos que $xv + ye^{yv} = 0$ define implícitamente $v(x,y)$ en un entorno de $(1,0)$. A tal efecto, sea $H(x,y,v) = xv + ye^{yv}$.

1. $H \in C^1(1,0,0)$.
2. $\frac{\partial H}{\partial v}(1,0,0) = x + y^2e^{yv}\Big|_{(1,0,0)} = 1 \neq 0.$

Entonces $v = v(x,y)$ en un entorno de $(1,0)$. Esto implica que $z = f(x,y)$ en un entorno de $(1,0)$.

Calculemos para terminar $v'_x(1,0)$ y $v'_y(1,0)$. Aplicando la fórmula de derivación implícita tenemos

$$v'_x(1,0) = -\left.\frac{H'_x}{H'_v}\right|_{(1,0,0)} = -\left.\frac{v}{x+y^2e^{yv}}\right|_{(1,0,0)} = -\frac{0}{1} = 0,$$

$$v'_y(1,0) = -\left.\frac{H'_y}{H'_v}\right|_{(1,0,0)} = -\left.\frac{e^{yv}+yve^{yv}}{x+y^2e^{yv}}\right|_{(1,0,0)} = -\frac{1}{1} = -1.$$

Con estos valores obtenemos

$$f'_x(1,0) = 0 + 1.0 = 0 \;\;,\;\; f'_y(1,0) = 1.(-1) - 2.0 = -1$$

Por lo tanto llegamos al resultado final

$$\nabla f(1,0) = (0,-1).$$

(2) Sea $xy + z + e^z = 1$ y $(0,0,0)$ una solución.

(a) Mostrar que la ecuación define a $z = g(x,y)$ en un entorno de (0,0).

(b) Hallar $\nabla g(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Solución.

(a) Sea $F(x,y,z) = xy + z + e^z - 1$. Entonces

1. $F \in C^1(0,0,0)$

2. $\dfrac{\partial F}{\partial z}(0,0,0) = 1 + e^z\Big|_{(0,0,0)} = 2 \neq 0.$

Entonces la ecuación $F(x,y,z) = xy + z + e^z - 1 = 0$ define a $z = g(x,y)$ en un entorno de (0,0).

(b) Para hallar $\nabla g(0,0)$ comencemos hallando $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)$.

Según la fórmula de derivación implícita tenemos

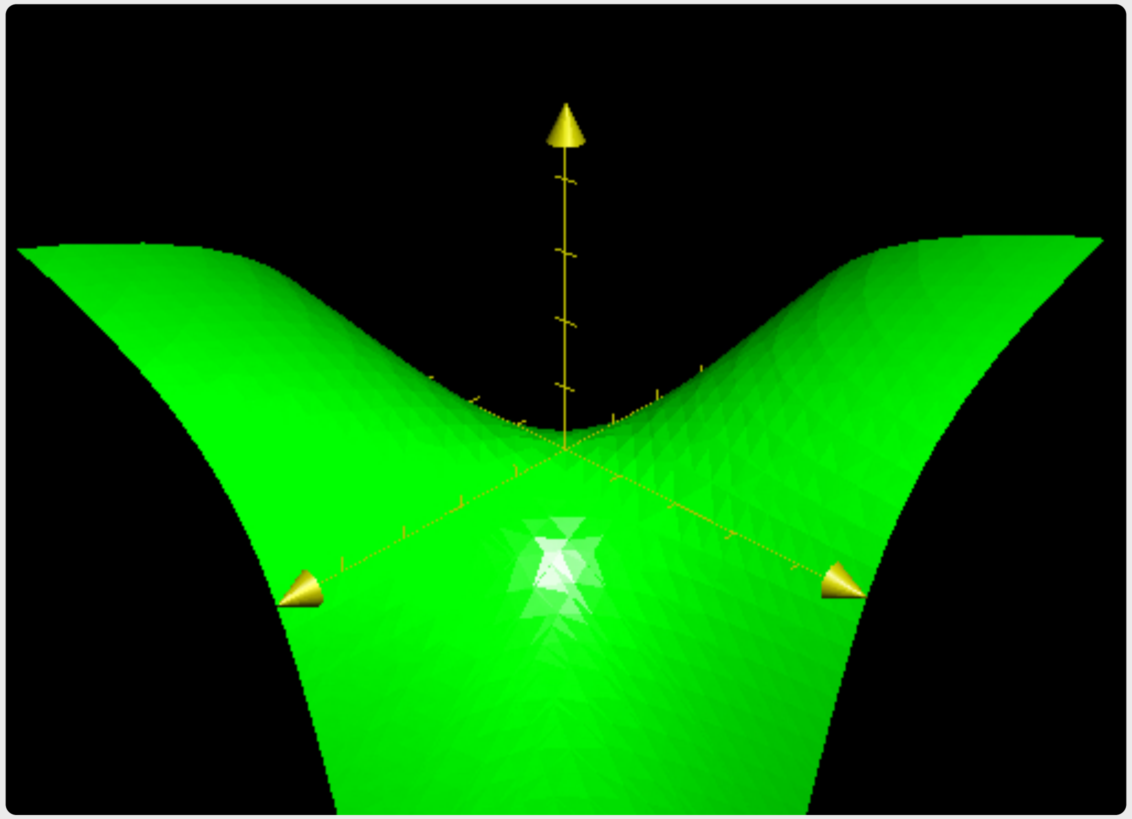
$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = -\frac{F'_x}{F'_z}\Big|_{(0,0,0)} = -\frac{y}{1+e^z}\Big|_{(0,0,0)} = -\frac{0}{2} = 0.$$

De la misma manera obtenemos

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = -\frac{F'_y}{F'_z}\Big|_{(0,0,0)} = -\frac{x}{1+e^z}\Big|_{(0,0,0)} = -\frac{0}{2} = 0.$$

Con esto tenemos

GALLERY 5.1 Superficie dada implícitamente.



Vemos que para cada (x,y) hay un único $z = g(x,y)$. También vemos que $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$ pues cerca del origen el gráfico de "confunde" con los ejes.

$$\nabla g(0,0) = (0,0).$$

Calculemos ahora $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0)$.

Aquí debemos derivar como un cociente recordando que $z = g(x,y)$. La existencia de esta segunda derivada está garantizada pues $F \in C^2(0,0,0)$. Ahora

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right) =$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F'_x}{F'_z}\right) = -\frac{(F'_x)'_y \,.\, F'_z - F'_x \,.\, (F'_z)'_y}{(F'_z)^2}\,.$$

Pero no es necesario semejante fórmula para un ejercicio. En cambio vemos que, al depender z de x e y, tenemos por simple derivación como un cociente

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\frac{1.(1+e^z) - y\,.\,e^z\,.\,z'_y}{(1+e^z)^2}\,.$$

Evaluando en $(x, y) = (0,0)$ tenemos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0,0) = -\left.\frac{1.(1+e^z) - y\,.\,e^z\,.\,z'_y}{(1+e^z)^2}\right|_{(0,0,0)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}\,.$$

Dejamos como un buen ejercicio el cálculo de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,0)$ donde el encontraremos que su valor es 0.

Se puede ver una solución on-line **aquí**.

SECCIÓN 2

Sistemas de ecuaciones.

CONTENIDOS

1. Curvas definidas como intersección de dos superficies.
2. Jacobianos.
3. Funciones definidas implícitamente por sistemas de ecuaciones.

En esta sección trabajamos con el caso más general del teorema de la función implícita. Haremos énfasis en los casos en que de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas se define a dos variables en función de una tercera. Esto le da un marco teórico a la idea de definir una curva como intersección de dos superficies, idea que si bien ya hemos venido trabajando intuitivamente demanda mayor precisión.

También trabajaremos con el caso en que de un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas se define a dos variables en función de otras dos.

Problemas.

(1) Demostrar que

$$\begin{cases} x^2 + ln(x+z) - y = 0 \\ yz + e^{xz} - 1 = 0 \end{cases}$$

define una curva C en un entorno del punto $(1,1,0)$ y hallar el plano normal a C en dicho punto.

Solución.

Verificamos las hipótesis del teorema de la función implícita para ver si podemos garantizar la existencia de dos funciones $y = y(x)$, $z = z(x)$ en un entorno de $x = 1$.

Sean

$$F(x, y, z) = x^2 + ln(x+z) - y$$

$$G(x, y, z) = yz + e^{xz} - 1.$$

Observamos que

$$F(1,1,0) = 0 \qquad \text{y} \qquad G(1,1,0) = 0,$$

que

1. $F, G \in C^1(1,1,0)$

2. $$J\begin{pmatrix} F & G \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{x+z} \\ z & y + xe^{xz} \end{pmatrix},$$

que evaluado en $(1,1,0)$ nos da como determinante Jacobiano

$$|J| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Luego, en un entorno de $(1,1,0)$ nuestra curva admite una parametrización de la forma

$$\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$$

la cual es regular pues $\| \gamma'(x) \| \neq 0$.

Para hallar una ecuación del plano normal en el punto $(1,1,0)$ procederemos geométricamente. El vector $\nabla F(1,1,0)$ es normal a la superficie de nivel 0 de F en dicho punto y un hecho anáogo ocurre con $\nabla G(1,1,0)$. Luego el producto vectorial de estos vectores es perpendicular a cada uno de estos y por lo tanto es tangente a la curva intersección de las superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$. Como

$$\nabla F(x, y, z) = (2x + \frac{1}{x+z}, -1, \frac{1}{x+z})$$

$$\nabla G(x,y,z) = (ze^{xz},\ z, y + xe^{xz}),$$

tenemos evaluando en $(1,1,0)$

$$\nabla F(1,1,0) = (3, -1,\ 1)$$

$$\nabla G(1,1,0) = (0,\ 0,\ 2).$$

Entonces

$$\nabla F(1,1,0) \times \nabla G(1,1,0) = (-2, -6,\ 0).$$

Por lo tanto, la ecuación del plano normal a la curva C en el punto $(1,1,0)$ es

$$(x-1, y-1, z-0) \cdot (-2, -6, 0) = 0.$$

(2) Mostrar que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 + xu + v^2 = 3 \\ xu + 2yv - xy = 0 \end{cases}$$

define a las variables x e y como funciones de u y v en un entorno de $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2,1,1,0)$ y calcular $\dfrac{\partial x}{\partial u}(1,0)$.

Solución.

Comencemos por observar que si definimos

$$F(x,y,u,v) = y^2 + xu + v^2$$

$$G(x,y,u,v) = xu + 2yv - xy$$

entonces

$$F(2,1,1,0) = 3 \qquad \text{y} \qquad G(2,1,1,0) = 0,$$

$$F, G \in C^1(2,1,1,0),$$

y finalmente

$$J\begin{pmatrix} F & G \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 2y \\ u-y & 2v-x \end{pmatrix}$$

que evaluado en $(2,1,1,0)$ nos da como determinante Jacobiano el valor

$$|J| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Luego el sistema efectivamente define a $x = x(u,v)$ y también a $y = y(u,v)$.

Ahora bien, para calcular $\dfrac{\partial x}{\partial u}(1{,}0)$ debemos calcular el cociente siguiente

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\begin{vmatrix} F & G \\ u & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F & G \\ x & y \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} x & 2y \\ x & 2v - x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & 2y \\ u - y & 2v - y \end{vmatrix}}$$

que evaluado en $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (2{,}1{,}1{,}0)$ nos da

$$|J| = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}} = -\frac{-8}{-2} = -4.$$

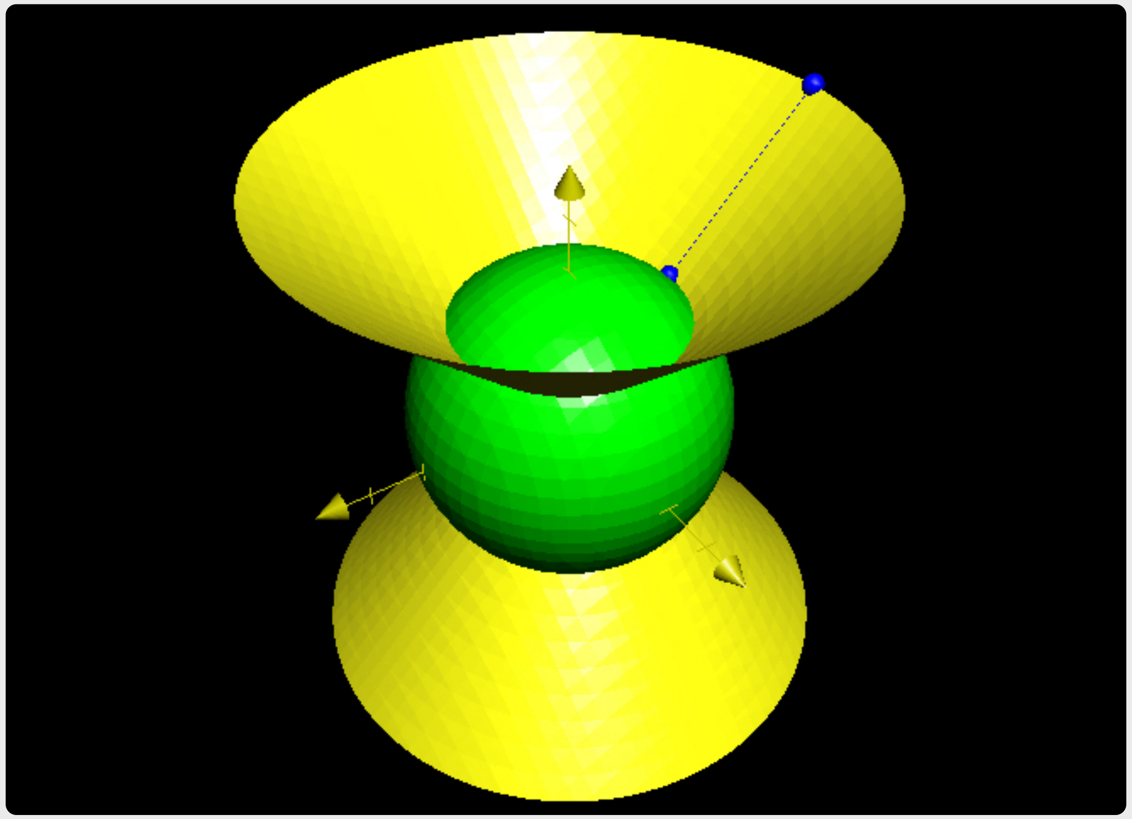
Luego tenemos $\dfrac{\partial x}{\partial u}(1{,}0) = -4$.

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(3) Demostrar que le esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ y el cono $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ son superficies ortogonales en todo punto de su intersección.

Solución.

GALLERY 5.2 Ortogonalidad de superficies.



El rayo azul se dirige hacia el origen cortando "entrando" perpendicularmente a la esfera.

Recordemos que se dice que dos superficies son ortogonales en un punto P si sus gradientes son ortogonales en dicho punto.

Sean entonces

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2,$$

$$G(x, y, z) = z^2 - a^2x^2 - b^2y^2.$$

Calculando sus gradientes en un punto cualquiera tenemos

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla G(x, y, z) = (-2ax, -2by, 2z).$$

Ahora bien el producto interno entre ellos es

$$\nabla F(x, y, z) \cdot \nabla G(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \cdot (-2ax, -2by, 2z) =$$

$$-4ax^2 - 4b^2 + 4z^2 = 4(z^2 - ax^2 - by^2) = 4.0 = 0,$$

como queríamos demostrar.