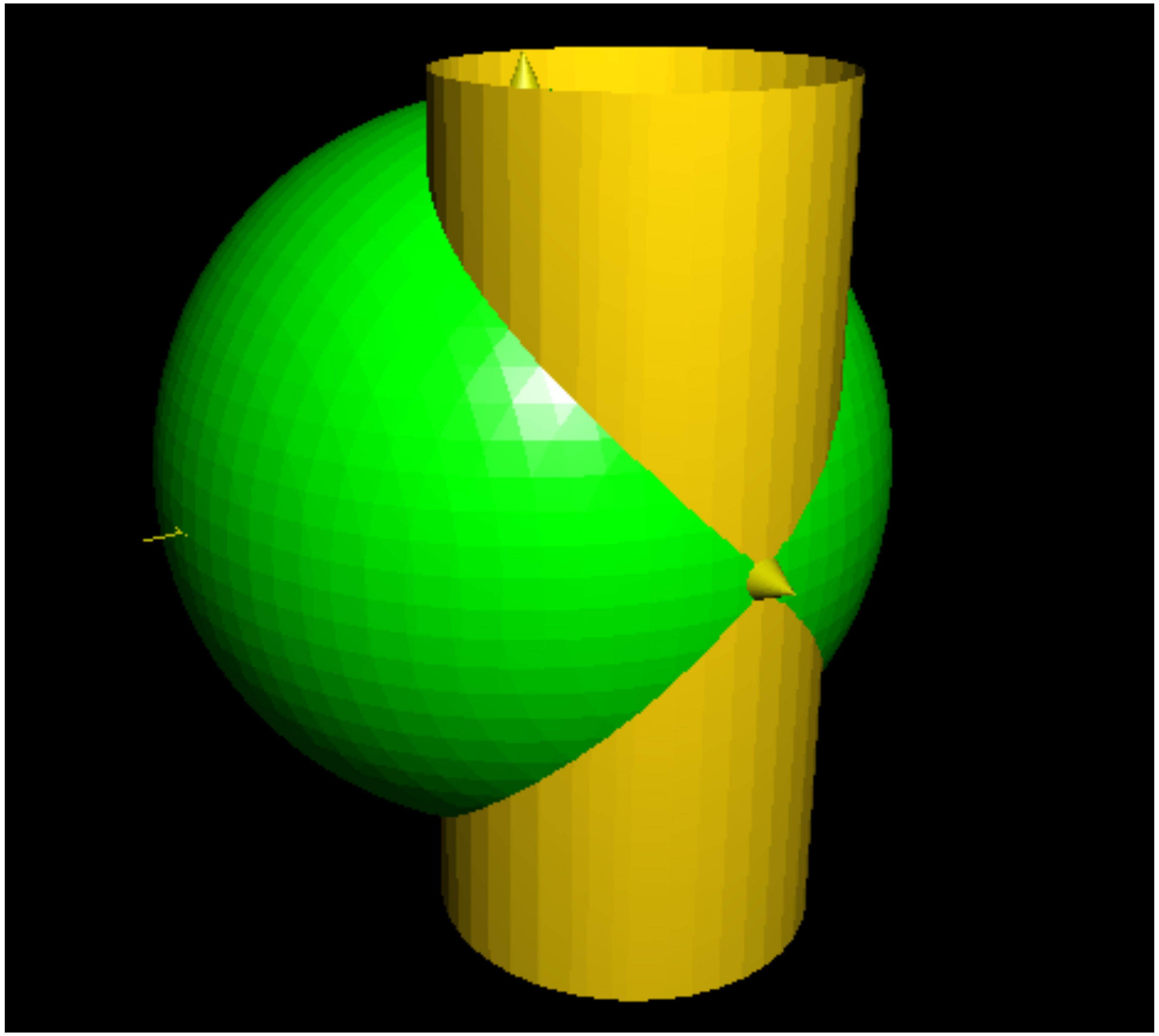
MARTÍN MAULHARDT

Análisis Matemático 2



UNA CUIDADOSA SELECCIÓN DE EJERCICIOS RESUELTOS

CAPÍTULO 1

Geometría del Plano.

El plano y el espacio constituyen el lugar geométrico sobre el cual vamos a trabajar en casi todo este libro y donde se aplican los teoremas integrales en los cuales culmina esta materia. La descripción del plano en coordenadas polares constituye una herramienta fundamental para resolver muchos problemas.

SECCIÓN I

Coordenadas Cartesianas.

CONTENIDOS

Esta sección es extremadamente sencilla y no debería representar mayor dificultad para el lector. Trabajaremos sólo aquellos problemas en los cuales el lector pueda tener alguna dificultad. Si el lector considera obvio su contenido puede pasar directamente a la siguiente sección.

Problemas.

1. Describir mediante un gráfico las regiones planas descriptas por :

(a) $A = \{(x, y) \in R^2 : x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} - y \leq 16\}$

(b) $B = \{(x, y) \in R^2 : 5\sinh(x) < y < 3\cosh(x)\}$

(c) $C = \{(x, y) \in R^2 : sen(x) < \frac{1}{2}\}$

Solución.

(a) Un simple completamiento de cuadrados permite identificar claramente de que se trata. En efecto

$$x^2 - 2x + \frac{y^2}{4} - y = (x-1)^2 + (\frac{y}{2} - 1)^2 - 2$$

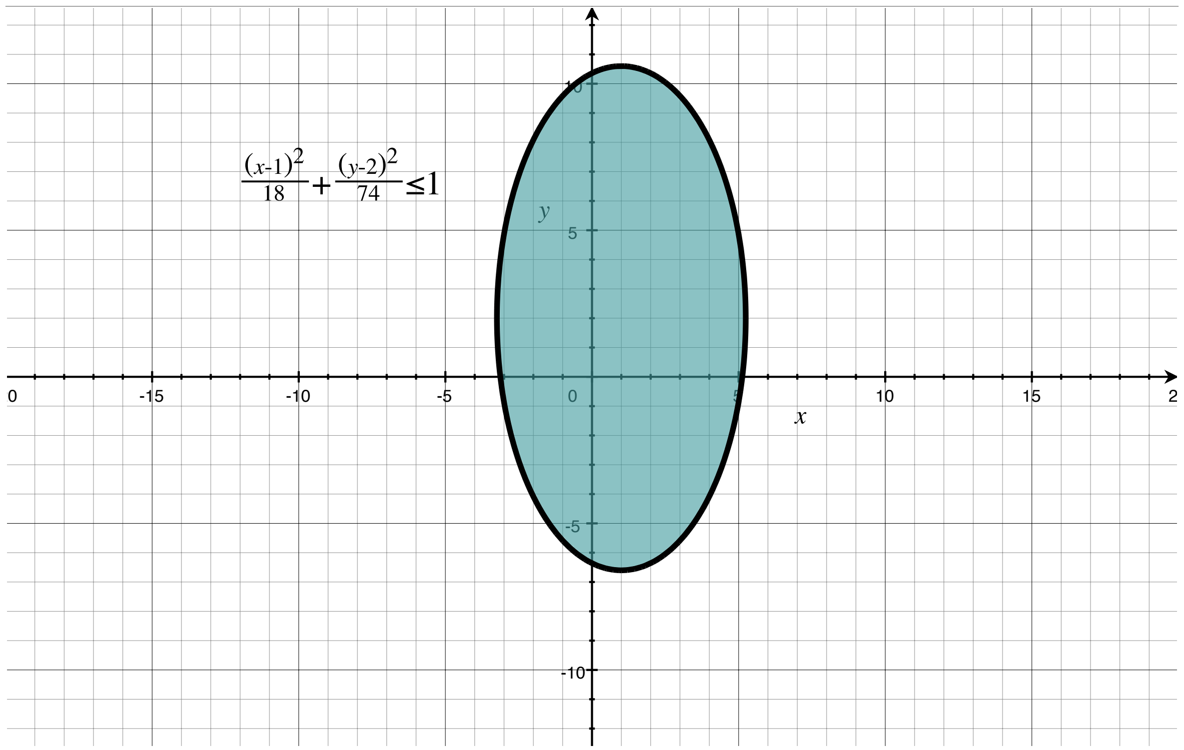
Luego el conjunto A se describe por la inecuación

$$(x-1)^2 + (\frac{y}{2} - 1)^2 \leq 18$$

Para poder realizar el gráfico aproximado conviene escribirla en la forma

$$\frac{(x-1)^2}{18} + \frac{(y-2)^2}{72} \leq 1$$

lo cual se representa geométricamente por el interior y el borde de una elipse con centro en el punto $P = (1,2)$ y semiejes $\sqrt{18}$ y $\sqrt{72}$.



(b) Este ejercicio es muy sencillo una vez que uno recuerda las definiciones de las funciones hiperbólicas. Recordamos que

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

De esta definición observamos que la ordenada de la función $\sinh(x)$ está siempre debajo de la ordenada de la función $\cosh(x)$ para cada abscisa. Pero a nosotros nos interesa averiguar, ¿para que abscisas

$$5\sinh(x) < 3\cosh(x)?$$

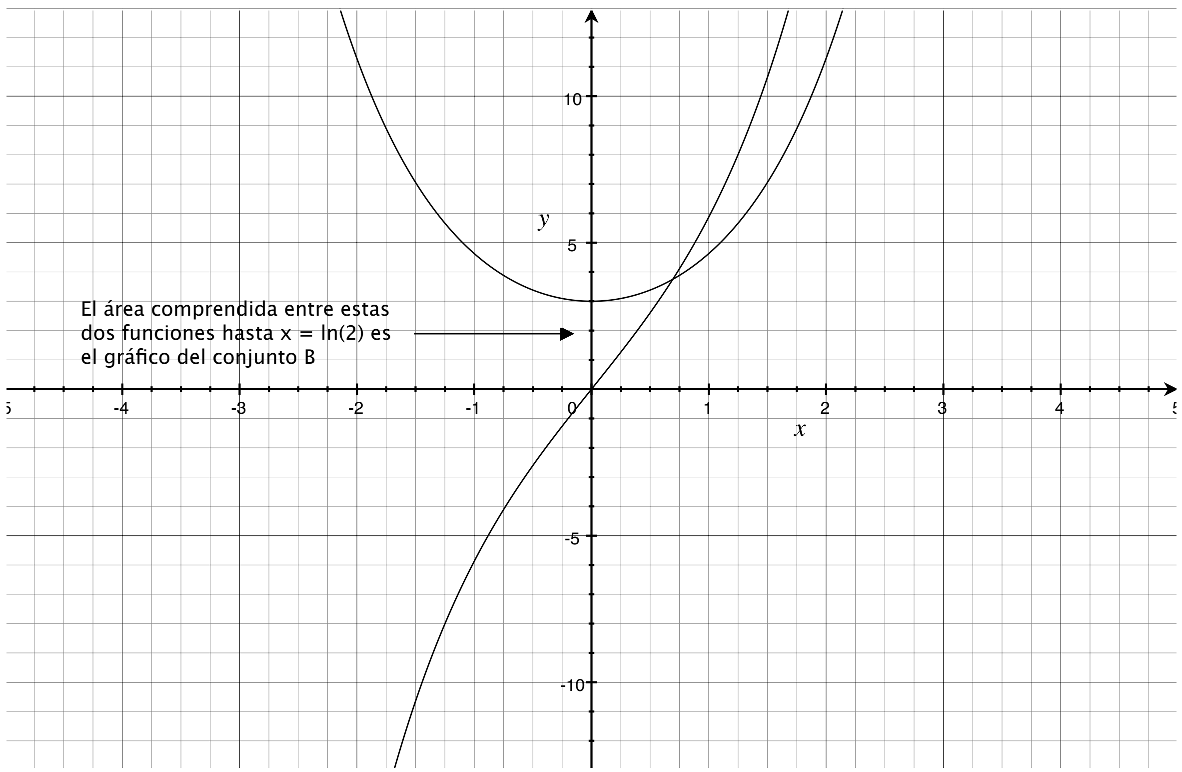
Esto es, luego de simplificar los “2” de los denominadores,

$$5e^x - 5e^{-x} < 3e^x + 3e^{-x}$$

$$e^{2x} < 4$$

$$x < \ln(2).$$

El gráfico del conjunto B resulta entonces :



(c) Este ítem es un poco más interesante que los dos anteriores. Es preciso hallar los $(x, y) \in R^2$ tales que

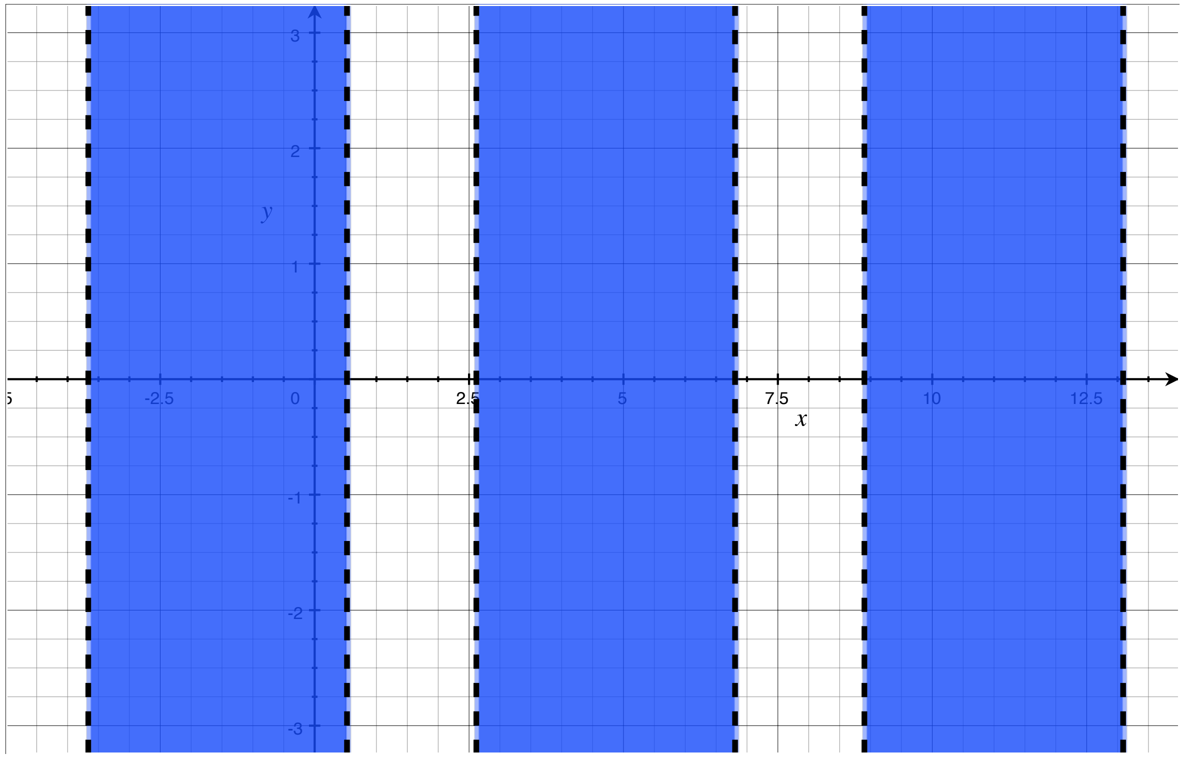
$$sen(x) < \frac{1}{2}.$$

Supongamos primero que $x \in [0,2\pi]$. Entonces, salvo que $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi$ se verificará nuestra desigualdad. Es decir nuestra desigualdad se verifica en $[0,\frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi,2\pi]$ y entonces puede parecer erróneamente que nuestra solución es una unión de intervalos.

Nuestra solución es el conjunto de los (x, y) que la satisfacen, no los x que la satisfacen. Por lo cual nuestra solución será un subconjunto del plano, no de la recta. Dicho conjunto se describe analíticamente así :

$$C = \{(x, y) : x \in \ldots (\frac{-7}{6}\pi, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi, \frac{13}{6}\pi) \cup (\frac{17}{6}\pi, \frac{25}{6}\pi) \cup \ldots \}.$$

Su gráfico es el siguiente.



SECCIÓN 2

Coordenadas Polares

Contenidos

1. Curvas en coordenadas polares.
2. Descripción de conjuntos en coordenadas polares.

Esta sección es la primera del libro que no debe subestimarse. El motivo de la dificultad es que debemos pensar el plano de otra manera a como estamos acostumbrados. Debemos identificar un punto del plano no por sus proyecciones sobre los ejes, sino por su distancia al origen, lo cual nos sitúa en una circunferencia, y luego por el ángulo que se forma entre el eje x y el rayo que sale desde el origen hacia el punto. Los ejercicios seleccionados tienen por objetivo familiarizarnos con estas ideas.

Problemas.

1. Trazar aproximadamente las curvas en coordenadas polares dadas por :

(a) $r = 2 \qquad 0 < \theta < \pi$

(b) $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

(c) $r = 2\ cos(\theta),\ \ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}.$

Solución.

(a) Recordamos que las coordenadas cartesianas se obtienen de las polares por las fórmulas

$$x = r\ cos(\theta)$$

$$y = r\ sen(\theta)$$

de lo cual se obtiene elevando al cuadrado ambos miembros de cada ecuación y sumando miembro a miembro que

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

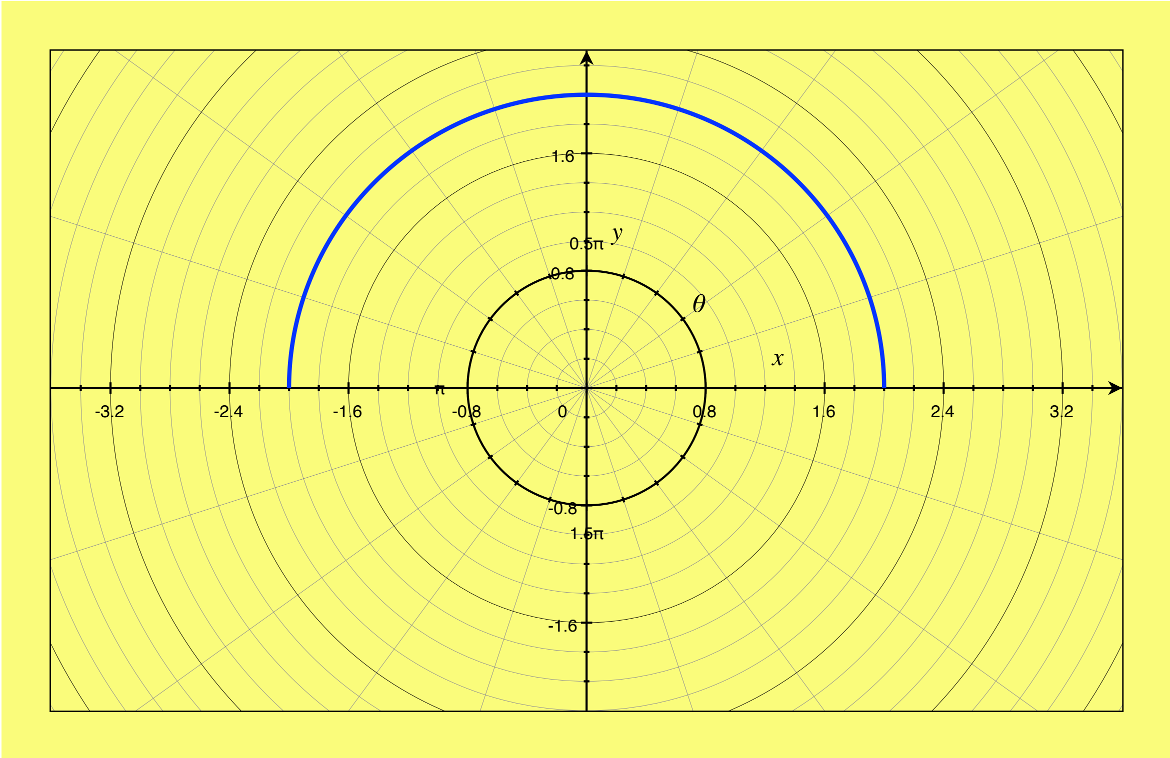
En nuestro caso $r = 2$, así que se obtiene la ecuación de una circunferencia de radio 2.

$$x^2 + y^2 = 4.$$

La solución anterior no es la mejor para desarrollar el pensamiento en **coordenadas polares**. Incidentalmente hay una pérdida de la variación de θ que no se está teniendo en cuenta. Lo que hicimos fue pasar la ecuación que nos dieron en coordenadas polares a las coordenadas cartesianas. Veamos como llegar al mismo resultado pensando en coordenadas polares.

Una ecuación de la forma $r = f(\theta)$ define al radio en función del ángulo de la misma manera que una ecuación de la forma $y = f(x)$ define la ordenada para cada abscisa. Entonces $r = 2$ nos dice que el radio es 2 para cada $0 < \theta < \pi$. El gráfico resulta el siguiente, donde el lector debe dirigir su atención a que el plano está siendo pensado en **coordenadas polares** y no cartesianas.

A lo largo del curso utilizaremos el color amarillo en los gráficos cuando el plano tenga las coordenadas polares y conservaremos el clásico blanco para las coordenadas cartesianas.



(b) De las ecuaciones

$$x = r\ cos(\theta)$$

$$y = r\ sen(\theta)$$

deducimos que, excepto que algún denominador se anule

$$tg(\theta) = \frac{y}{x}.$$

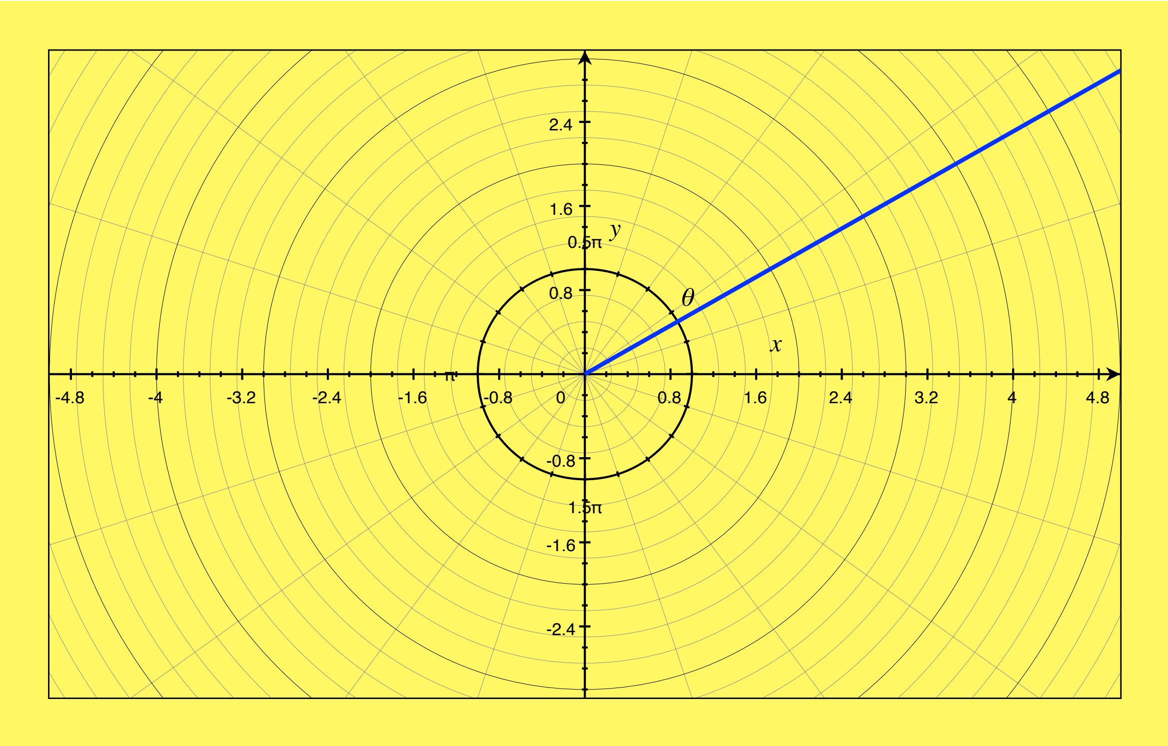
Luego introduciendo el valor de θ que nos han dado obtenemos

$$tg(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y}{x}$$

o lo que es lo mismo

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Pero si procedemos así estamos nuevamente pensando el plano el coordenadas cartesianas y podríamos nuevamente agregar puntos que en la curva polar (en coordenadas polares) no estaban. Volviendo a meditar en coordenadas polares $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ representa el ángulo igual a una constante. Es decir, representa una semirrecta. Dicha semirrecta la vemos en el siguiente gráfico.



(c) Este ítem es el más interesante del ejercicio, porque verdaderamente el radio depende del ángulo como indica la fórmula $r = 2\ cos(\theta)$. Si pasamos de esta ecuación a la correspondiente en cartesianas teniendo en cuenta que $x = r\ cos(\theta)$ encontramos

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

o lo que es lo mismo

$$x^2 + y^2 = 2x$$

que luego de un completamiento de cuadrados

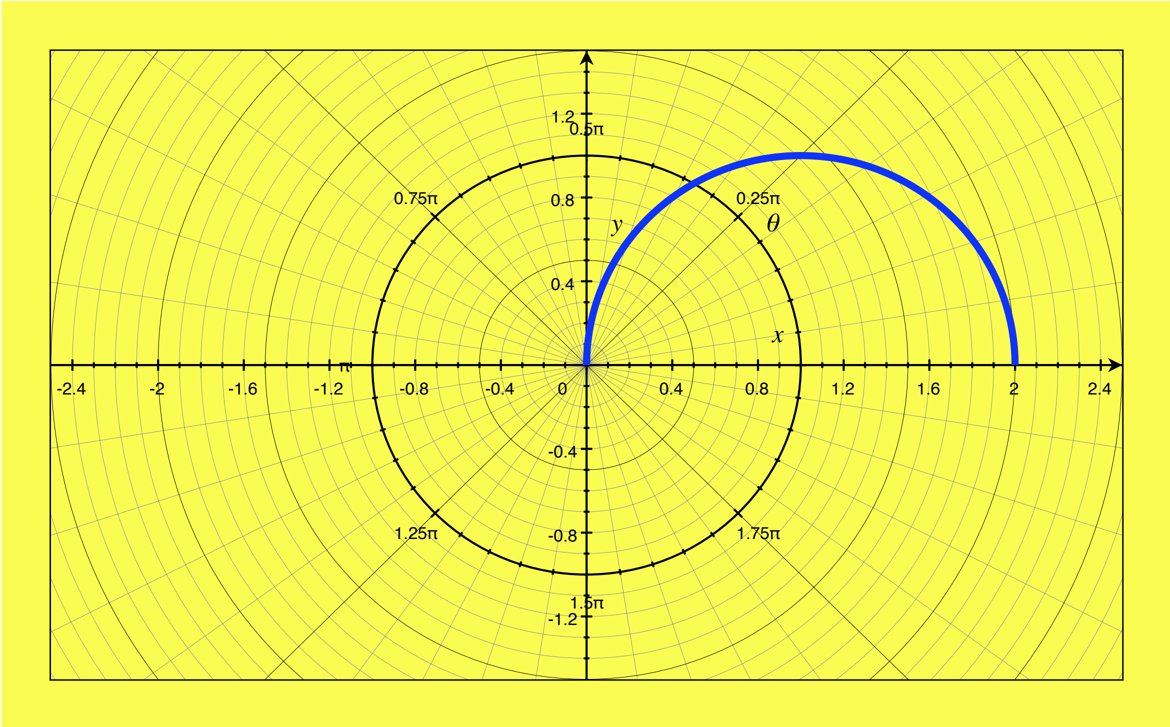
$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Esto representa una circunferencia de radio 1 con centro en el punto $P = (1{,}0)$.

Pero ya discutimos los inconvenientes del paso a la ligera de las coordenadas cartesianas a las polares sin tener en cuenta el dominio de variación de las variables en cuestión. Si calculamos para distintos valores de θ el valor de r obtendremos, por ejemplo, que si $\theta = 0,\ \ r = 2$. Si $\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \ r = \sqrt{3}$. Si $\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \ r = \sqrt{2}$.

El gráfico que resulta es entonces la semicircunferencia siguiente donde volvemos a graficar en amarillo puesto que el plano está siendo pensado en coordenadas polares.

Podés ver una solución on-line clickeando en el siguiente **aquí**.



2. Describir mediante inecuaciones en coordenadas cartesianas las regiones planas descriptas, en coordenadas polares, por

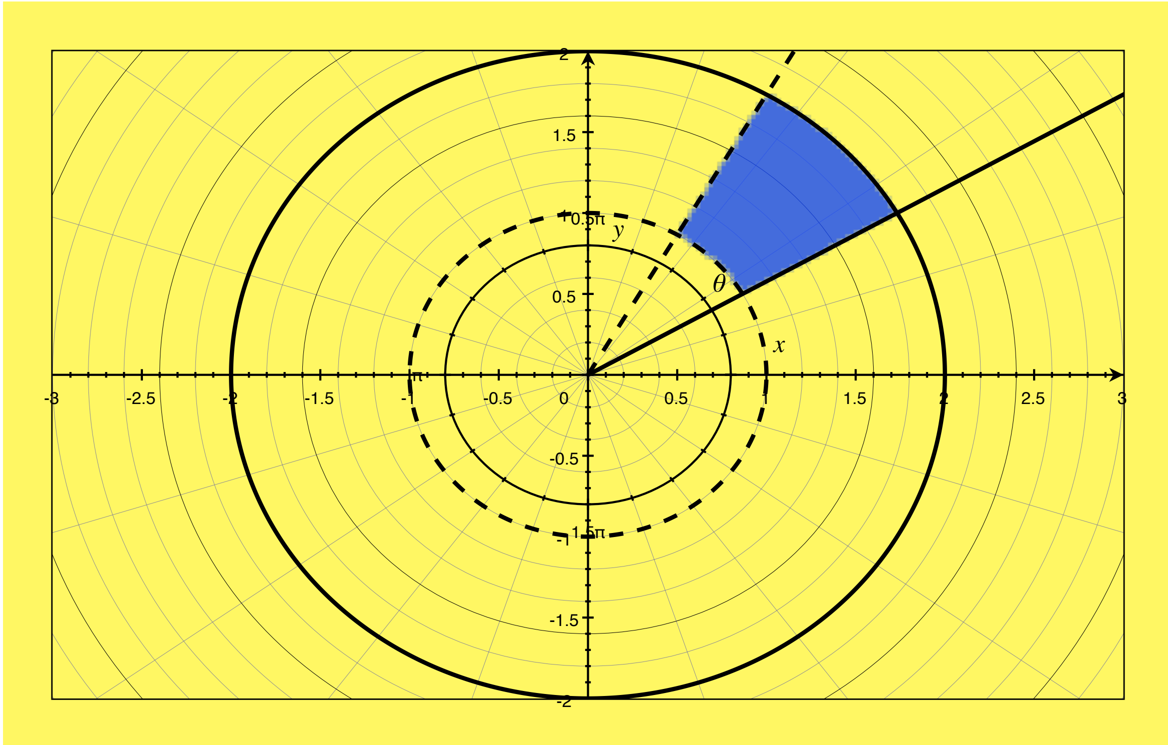
(a) $\quad 1 < r \leq 2, \quad \dfrac{\pi}{6} \leq \theta < \dfrac{\pi}{3}$

(b) $\quad r \leq 4\ sen(\theta), \quad \theta \in [0,\pi]$**.**

Solución.

(a) En los casos en que haya que pasar de las coordenadas polares a las cartesianas realizar el gráfico previamente puede resultar muy útil porque ya se tendrá una idea de como describirlo en coordenadas cartesianas.

Si r varía entre 1 y 2 es evidente que se trata de un anillo y si simultáneamente el ángulo varía entre $\dfrac{\pi}{6}$ y $\dfrac{\pi}{3}$ el anillo se reduce a un sector circular.



La descripción en coordenadas cartesianas es muy sencilla ahora pues al ser $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ obtenemos

$$1 < x^2 + y^2 \leq 4$$

y al ser $tg(\theta) = \dfrac{y}{x}$ obtenemos

$$tg(\frac{\pi}{6}) \leq tg(\theta) < tg(\frac{\pi}{3})$$

o sea

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{y}{x} < \sqrt{3}$$

donde hemos usado que la función tangente es creciente en el intervalo considerado por lo cual se conserva la desigualdad. La respuesta es entonces el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 1 < x^2 + y^2 \leq 4 \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}} \leq y < \sqrt{3}x \end{cases}$$

(b) Ya conocemos esta idea del ejercicio 1 (c). De

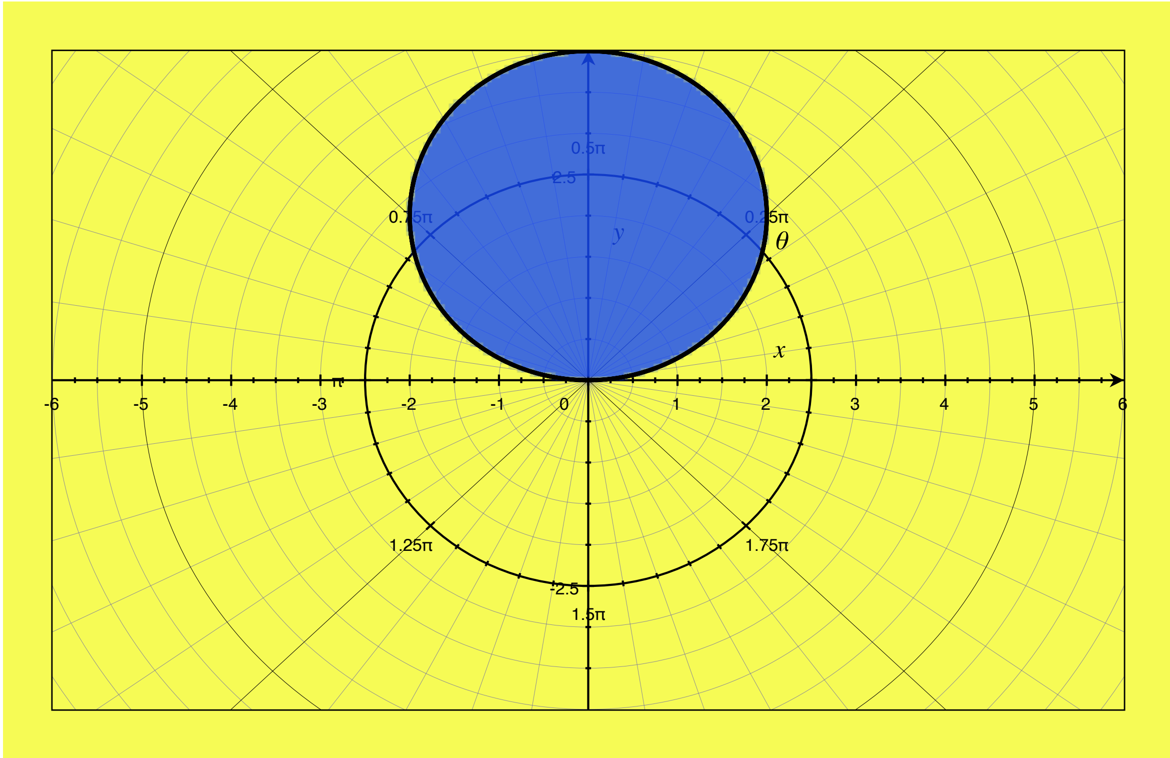
$$r \leq 4\ sen(\theta)$$

obtenemos

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 4\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

es decir

$$x^2 + (y-2)^2 \leq 4.$$

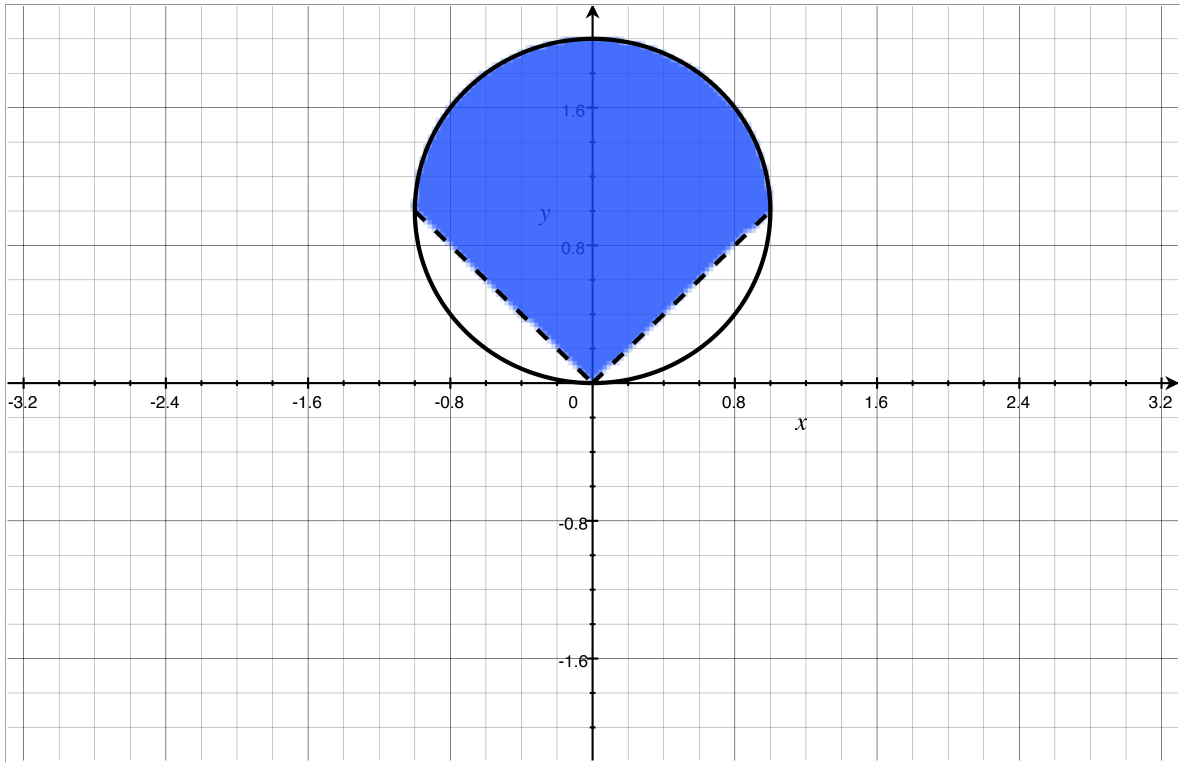


(3) Describir mediante inecuaciones en coordenadas polares la región plana descripta por

$$R = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 0,\ \ y > |\, x\, |\ \}.$$

Solución.

El gráfico resulta sencillamente



La primera inecuación re-escrita

$$x^2 + y^2 \leq 2y$$

se describe en coordenadas polares

$$r^2 \leq 2\ r\ sen(\theta)$$

o simplificando

$$r \leq 2\ sen(\theta).$$

Y la segunda define trivialmente la variación del ángulo

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}.$$

La respuesta final es entonces el sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 0 < r \leq 2sen(\theta) \\ \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Obsérvese que el punto $(0,0) \notin R$ por eso hemos escrito en la primera inecuación $0 < r$.