Capítulo 6

Polinomio de Taylor. Extremos.

En este capítulo trabajamos con el polinomio de Taylor de una función de varias variables y su aplicación al estudio de los extremos de funciones de más de una variable.

SECCIÓN 1

Polinomio de Taylor.

CONTENIDOS

En esta primera sección trabajamos con el polinomio de Taylor de una función de varias variables. La aplicación más importante de ésta es al estudio de extremos de funciones de varias variables a lo cual se dedica la siguiente sección, de modo que el estudio de valores aproximados es, al contrario que en Análisis I tocado sólo tangencialmente. Sin embargo, los ejercicios son en general un poco más complicados que los análogos de Análisis I, de modo que se requiere mayor pensamiento para resolverlos.

Problemas.

(1) Calcular un valor aproximado de $0.98^{2.01}$.

Solución.

Consideremos la función

$$f(x, y) = x^y.$$

Observamos que la función es $C^3(1,2)$. Luego podemos armar su polinomio de Taylor de segundo orden allí.

Recordemos que para una función $f \in C^3(x_0, y_0)$ su polinomio de Taylor de segundo orden es

$$P_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!}\Big[f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\, f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2\Big].$$

Calculando este polinomio para $f(x, y) = x^y$ en $(x_0, y_0) = (1,2)$ tenemos que

$$f'_x(x, y) = yx^{y-1} \qquad f'_y(x, y) = x^y ln(x)$$

$$f''_{xx}(x, y) = y(y-1)x^{y-2} \qquad f''_{yy}(x, y) = x^y ln^2(x)$$

$$f''_{xy}(x, y) = x^{y-1} + yx^{y-1} ln(x).$$

Estas derivadas parciales evaluadas en $(x_0, y_0) = (1,2)$ nos dan

$$f'_x(1,2) = 2 \qquad f'_y(1,2) = 0$$

$$f''_{xx}(1,2) = 2 \qquad f''_{xy}(1,2) = 1 \qquad f''_{yy}(1,2) = 0.$$

Con estas derivadas parciales concluimos que

$$P_2(x,y) = 1 + 2.(x-1) + 0.(y-2) +$$

$$+\frac{1}{2!}[2.(x-1)^2 + 2.1.(x-1)(y-2) + 0.(y-2)^2].$$

Luego

$$0.98^{2.01} = f(0.98,\ 2.01) \approx P(0.98,\ 2.01) =$$

$$1 + 2.(-0.02) + \frac{1}{2!}[2.(-0.02)^2 + 2.1.(-0.02).(0.01)] =$$

$$= 0.9602.$$

Por lo tanto

$$0.98^{2.01} \approx 0.9602.$$

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(2) El polinomio de Taylor de 2° orden de f en un entorno de (2,1) es $p(x,y) = x^2 - 3xy + 2x + y - 1$. Hallar una ecuación cartesiana para el plano tangente a la gráfica de f en $(2,1,z_0)$.

Solución.

Este ejercicio es muy sencillo si recordamos que el polinomio de Taylor de orden n de $f(x,y)$ tiene la propiedad de que coinciden en el punto y en sus derivadas parciales hasta el orden n en dicho punto.

Como la ecuación del plano tangente a $f(x,y)$ en (2,1) ya sabemos que es

$$f(x,y) = f(2,1) + f'_x(2,1)(x-2) + f'_y(2,1)(y-1)$$

sólo debemos calcular

$$f(2,1) = p(2,1) = 2,$$

$$f'_x(2,1) = p'_x(2,1) = 2x - 3y + 2\Big|_{(2,1)} = 3$$

$$f'_y(2,1) = p'_y(2,1) = -3x + 1\Big|_{(2,1)} = -5.$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(2,1,2)$ resulta

$$z = 2 + 3.(x - 2) - 5.(y - 1).$$

(3) Sea $f : R^2 \to R$, $C^3(R^2)$ cuyo polinomio de Taylor de segundo orden en el punto $(2,2)$ es

$$p(u, v) = 14 + v^2 - 2uv - u^2 .$$

Si $h(x, y) = f(x^2 - 2y, y^2 + xy - 1)$, estimar el valor de $h(1.98,1.02)$ usando una aproximación lineal.

Solución.

Observamos primero que si $(x, y) = (2,1)$ entonces

$$x^2 - 2y = 2 \qquad \text{y} \qquad y^2 + xy - 1 = 2.$$

La ecuación del plano tangente a $h(x, y)$ en $(2,1)$ es

$$z = h(2,1) + h'_x(2,1)(x - 2) + h'_y(2,1)(y - 1) .$$

Con ella podemos calcular aproximadamente $h(1.98,1.02)$. Sólo hace falta calcular entonces

$$h(2,1), \quad h'_x(2,1), \quad h'_y(2,1).$$

Ahora bien, si definimos la función

$$(u, v) = g(x, y) = (x^2 - 2y,\ y^2 + xy - 1)$$

y si llamamos a las variables independientes de f, u y v, es decir, consideramos que es $f(u, v)$ entonces la función

$$h(x, y) = (f \circ g)(x, y) = f[g(x, y)]\,.$$

Tenemos entonces que

$$h(2{,}1) = f[g(2{,}1)] = f(2{,}2) = p(2{,}2) = 6.$$

Para hallar $h'_x(2{,}1)$ debemos usar la regla de la cadena. Sabemos, por haber practicado la unidad 4 que

$$h'_x(2{,}1) = f'_u(2{,}2)\,.\,u'_x(2{,}1) + f'_v(2{,}2)\,.\,v'_x(2{,}1)$$

$$h'_y(2{,}1) = f'_u(2{,}2)\,.\,u'_y(2{,}1) + f'_v(2{,}2)\,.\,v'_y(2{,}1).$$

Por ser $p(u, v)$ el polinomio de Taylor de segundo orden de f en el punto (2,2) tenemos

$$f'_u(2{,}2) = p'_u(2{,}2) = -\,2v - 2u\Big|_{(2,2)} = -\,8$$

$$f'_v(2{,}2) = p'_v(2{,}2) = 2v - 2u\Big|_{(2,2)} = 0,$$

y trivialmente

$$u'_x(2{,}1) = 2x\Big|_{(2,1)} = 4 \qquad u'_y(2{,}1) = -\,2$$

$$v'_x(2{,}1) = y\Big|_{(2,1)} = 1 \qquad v'_y(2{,}1) = 2y + x\Big|_{(2,1)} = 4.$$

Sustituyendo los valores recién hallados tenemos

$$h'_x(2,1) = -\,8.4 + 0.1 = -\,32$$

$$h'_y(2,1) = -\,8.(-2) + 0.4 = 16.$$

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente a $h(x, y)$ en $(2,1)$ es

$$z = h(2,1) + h'_x(2,1)(x-2) + h'_y(2,1)(y-1) =$$

$$= 6 - 32.(x-2) + 16.(y-1).$$

Finalmente, una aproximación lineal de $h(1.98,1.02)$ es

$$h(1.98,1.02) \approx 6 - 32.(-0.02) + 16.(0.02) = 6.96.$$

SECCIÓN 2

Extremos.

CONTENIDOS

En esta segunda sección del capítulo estudiamos los puntos críticos de funciones de varias variables y en particular los máximos y mínimos. Vemos la utilidad de las derivadas de orden superior para clasificar los extremos.

Problemas.

(1) Dadas las siguientes funciones $f : R^2 \to R$ hallar los puntos estacionarios. Analizar si en ellos la función alcanza un extremo relativo y, en ese caso, clasificarlo.

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 + \dfrac{48}{x} + \dfrac{48}{y}$

(b) $z = f(x, y)$ definida por $xy + z + e^z - 1 = 0$.

Solución.

(a) Observamos primero que

$$D(f) = \{(x, y) \in R^2 : x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0\}.$$

Para hallar los puntos estacionarios debemos hallar los (x, y) tales que $\nabla f(x, y) = (0,0)$.

Entonces

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 - \frac{48}{x^2} = 0 \\ f'_y(x, y) = 3y^2 - \frac{48}{y^2} = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación implica $3x^4 - 48 = 0$ y análogamente la segunda implica $3y^4 - 48 = 0$. De aquí resulta que

$$x = \pm 2 \qquad \text{e} \qquad y = \pm 2.$$

Luego tenemos 4 puntos críticos, a saber

$$P_1 = (2,\ 2), \quad P_2 = (2, -2), \quad P_3 = (-2,\ 2), \quad P_4 = (-2, -2)\,.$$

Para clasificarlos calculemos la matriz Hessiana de $f(x, y)$. Sabemos que

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}.$$

En nuestro caso resulta

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x + \frac{96}{x^3} & 0 \\ 0 & 6y + \frac{96}{y^3} \end{pmatrix}.$$

Comencemos por el punto $P_1 = (2,\ 2)$.

$$H_f(2{,}2) = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 24 \end{pmatrix}.$$

Como

$$|H_f(2{,}2)| = 24.24 - 0.0 = 576 > 0 \quad \text{y}$$

$$f''_{xx}(2{,}2) = 24 > 0,$$

concluimos que en $P_1 = (2{,}2)$ la función presenta un **mínimo** con valor $f(2{,}2) = 64$.

Continuemos con el punto $P_2 = (2, -2)$.

$$H_f(2,-2) = \begin{pmatrix} 24 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Como

$$|H_f(2,-2)| = -24.24 - 0.0 = -576 < 0$$

concluimos que en $P_2 = (2, -2)$ tenemos un **punto de ensilladura** con valor $f(2, -2) = 0$.

Sigamos con el punto $P_4 = (-2, -2)$

$$H_f(-2,-2) = \begin{pmatrix} -24 & 0 \\ 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Como

$$|H_f(-2,-2)| = -24.(-24) - 0.0 = 576 > 0$$

y

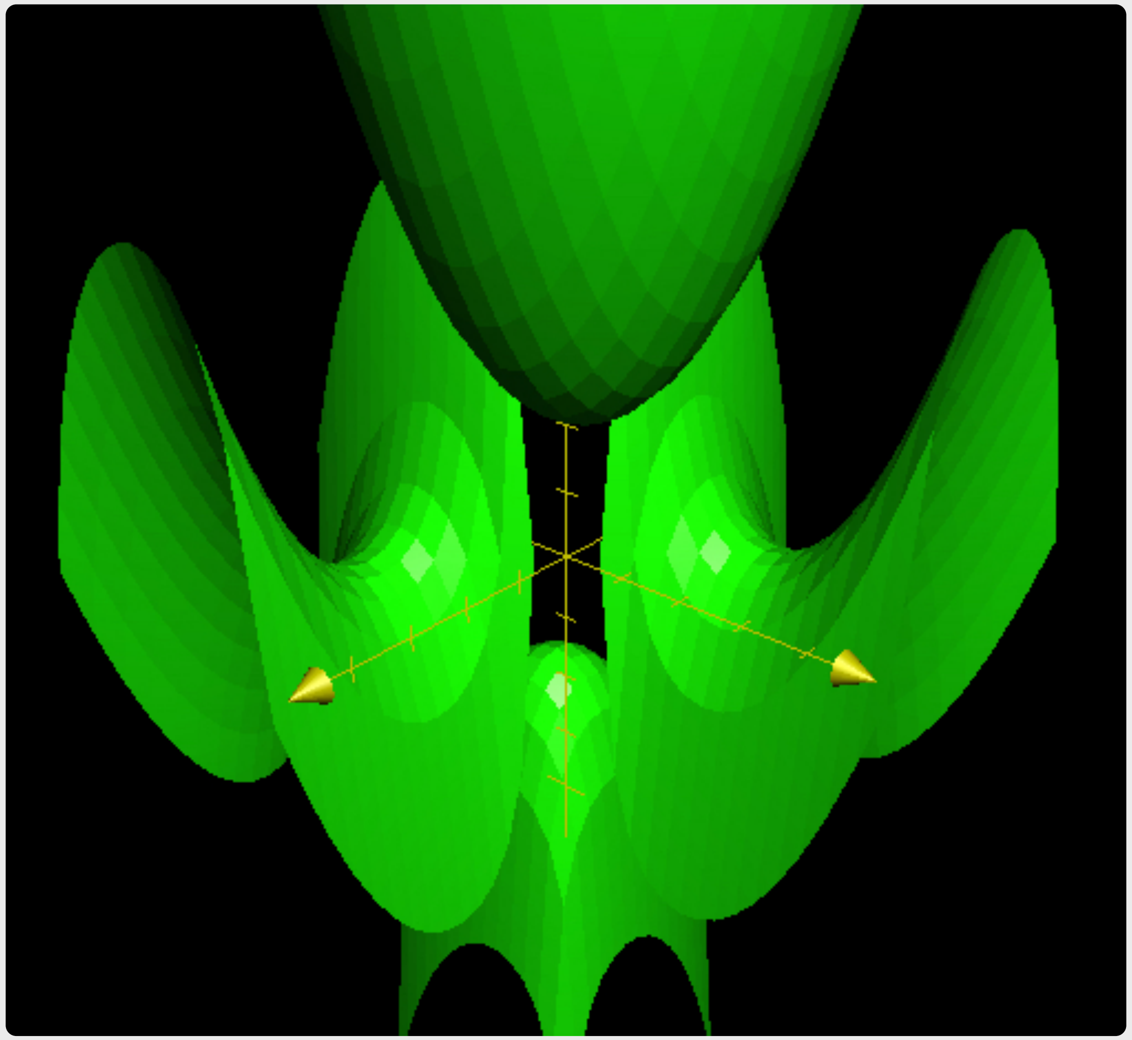
$$f''_{xx}(-2,-2) = -24 < 0,$$

concluimos que en $P_4 = (-2,-2)$ tenemos un **máximo** con valor $f(-2,-2) = -64$.

Dejamos el punto $P_3 = (-2, 2)$ como un simple ejercicio. La gráfica de la función es la de la galería 6.1.

(b) En este ítem debemos hacer lo mismo pero recordando que la función está dada implícitamente y luego debemos derivar usando las reglas de derivación para este tipo de funciones.

Galería 6.1. Gráfica de la función $f(x, y)$



Vemos el mínimo en (2,2), el máximo en $(-2,-2)$ y los puntos de ensilladura en $(-2, 2)$ y $(2,-2)$

Comencemos calculando los puntos estacionarios.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = 0.$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{1+e^z} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{1+e^z} = 0.$$

Notemos incidentalmente que

$$1 + e^z \neq 0 \qquad \forall z \in R\,.$$

De estas ecuaciones deducimos que el punto crítico es $(x, y) = (0{,}0)$ y de esto sustituyendo en la expresión implícita obtenemos $z = 0$.

Para clasificarlo debemos calcular la Hessiana de f en $(x, y) = (0{,}0)$. A tal efecto derivamos el cociente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{1+e^z}$$

recordando que z DEPENDE de x e y.

Luego

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{0.(1+e^z) - y\,.\,e^z\,.\,z'_x}{(1+e^z)^2}\,.$$

Evaluando en $(x, y) = (0{,}0)$ tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0{,}0) = -\left.\frac{0.(1+e^z) - y\,.\,e^z\,.\,z'_x}{(1+e^z)^2}\right|_{(0,0,0)} = 0.$$

Análogamente, obtenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0{,}0) = 0.$$

Para las derivadas cruzadas tenemos derivando $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ respecto de y que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{1.(1+e^z) - y\,.\,e^z\,.\,z'_y}{(1+e^z)^2}\,.$$

Evaluando en $(x, y) = (0,0)$ tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = -\left.\frac{1.(1+e^z) - y\,.\,e^z\,.\,z'_y}{(1+e^z)^2}\right|_{(0,0,0)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}\,.$$

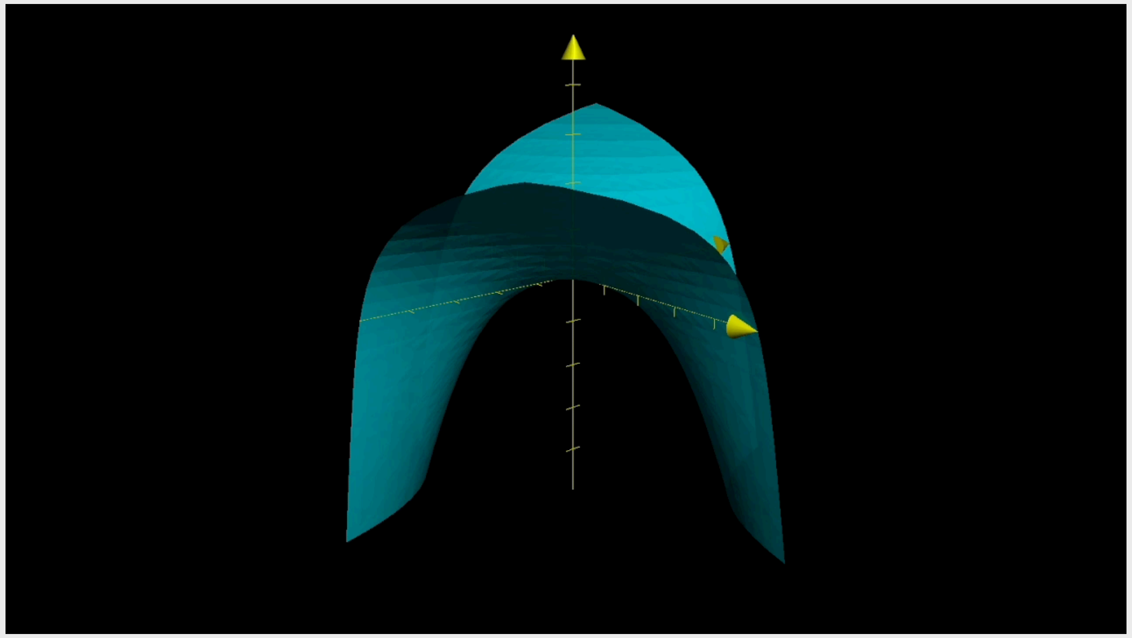
Por lo tanto la matriz Hessiana de f en $(x, y) = (0,0)$ es

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $|H_f(0,0)| = -\frac{1}{4} < 0$ tenemos en el punto $(0,0)$ un **punto de ensilladura**.

En el siguiente gráfico vemos que realmente esto es así.

Movie 6.2. Gráfica de la función definida implícitamente.



Vemos en esta movie que, como hemos probado, la función definida implícitamente presenta en $(0,0)$ un punto de ensilladura con valor $f(0,0) = 0$.

Se puede ver una solución clickeando **aquí**.

(2) Analizar la existencia de extremos relativos y absolutos de la función siguiente en su dominio.

$$f(x, y) = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3).$$

Solución.

Obviamente el dominio de f es $D(f) = R^2$. Observamos además que

$$f(x, y) = x^6 - y^6.$$

Hallemos los puntos estacionarios del dominio. Para ello debemos resolver

$$\nabla f(x, y) = (0,0).$$

Entonces

$$f'_x(x, y) = 6x^5 = 0 \qquad f'_y(x, y) = -6y^5 = 0.$$

Luego vemos que el único punto crítico es $P = (0,0)$.

Para clasificarlo, calculemos la Hessiana de f.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30x^4 & 0 \\ 0 & -30y^4 \end{pmatrix}.$$

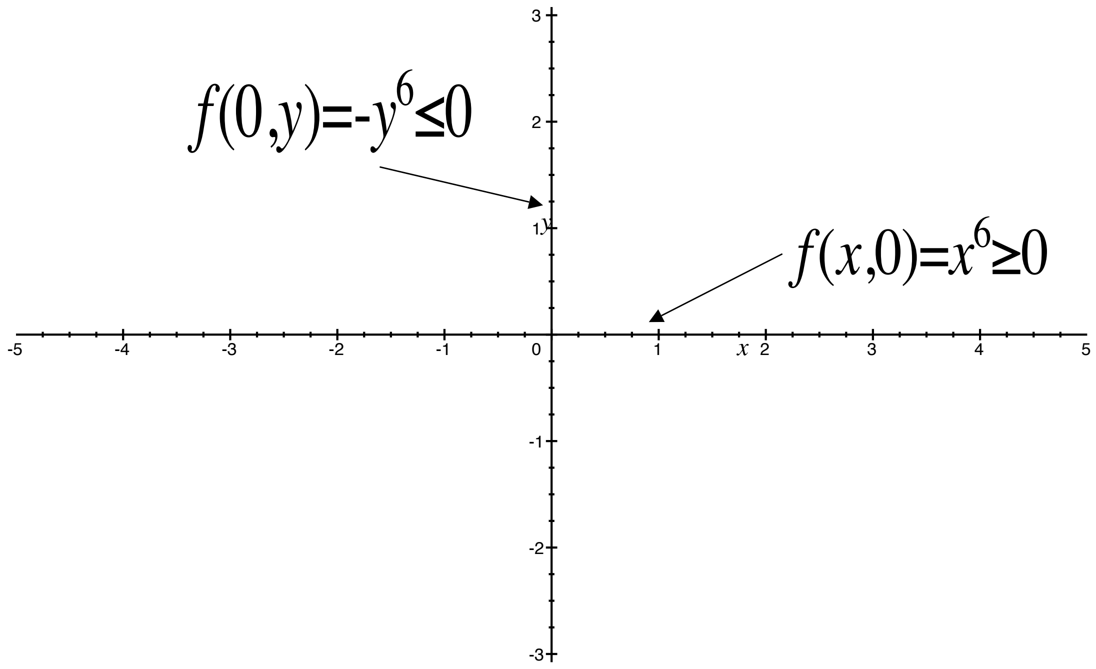
Entonces

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos entonces que $|H_f(0,0)| = 0$. Entonces no podemos, al menos de este dato, clasificar el punto crítico.

Sin embargo, no tendremos dificultad en probar que es un **punto de ensilladura**. En efecto, para la función sobre los ejes tenemos

$f(x,0) = x^6 \geq 0 \qquad\qquad f(0,y) = -y^6 \leq 0.$



Estos datos,combinados con $f(0,0) = 0$ nos dicen que el punto es de ensilladura pues, en TODO entorno del punto $(0,0)$ tenemos puntos de la forma $(x,0)$ y de la forma $(0,y)$ y en ellos se satisfacen respectivamente las desigualdades anteriores.

Respecto de los extremos absolutos, recordemos que f alcanza un **máximo** absoluto en (x_0, y_0) si

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) \leq f(x_0, y_0).$$

Analizando la función en el eje x vemos que

$$f(x,0) = x^6.$$

Si existiera un **máximo** absoluto, existiría un valor $f(x_0, y_0) = M$ tal que $x^6 \leq M$ para todo $x \in R$. Absurdo. Luego no hay **máximo** absoluto. Dejamos como un buen entrenamiento la demostración análoga de la no existencia de **mínimo** absoluto. Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.

(3) Supongamos que $f : R^2 \to R$ es una función positiva y $C^3(R^2)$ cuyo gradiente se anula sólo en $P_1 = (1, -1)$ y en $P_2 = (-1,1)$, cuyo determinante Hessiano en esos puntos en no nulo y tal que en P_1 tiene un **máximo** 10 y en P_2 tiene un **mínimo** 3. Estudiar los extremos de $g(x, y) = \dfrac{1}{f(x, y)}$.

Solución.

Observamos que al ser f positiva es g positiva y al ser $f \in C^3$ también es $g \in C^3$. Para analizar los extremos relativos de g anulamos su gradiente.

$$g'_x(x,y) = -\frac{1}{f^2(x,y)}.f'_x(x,y) = 0$$

$$g'_y(x,y) = -\frac{1}{f^2(x,y)}.f'_y(x,y) = 0.$$

Entonces

$$f'_x(x,y) = 0 \qquad f'_y(x,y) = 0.$$

Pero por hipótesis esto ocurre sólo en los puntos $P_1 = (1,-1)$ y $P_2 = (-1,1)$. Calculemos ahora el Hessiano de g el el punto $P_1 = (1,-1)$. Aplicando la regla para derivar un producto vemos que, por anularse $f'_x(x,y)$ en dicho punto tendremos

$$g''_{xx}(1,-1) = -\frac{1}{f^2(1,-1)}.f''_{xx}(1,-1)$$

$$g''_{xy}(1,-1) = -\frac{1}{f^2(1,-1)}.f''_{xy}(1,-1)$$

$$g''_{yy}(1,-1) = -\frac{1}{f^2(1,-1)}.f''_{yy}(1,-1).$$

Recordando que $f(1,-1) = 10$ resulta para la Hessiana de g en $P_1 = (1,-1)$

$$H_g(1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{100} f''_{xx}(1,-1) & \frac{-1}{100} f''_{xy}(1,-1) \\ \frac{-1}{100} f''_{xy}(1,-1) & \frac{-1}{100} f''_{yy}(1,-1) \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$|H_g(1,-1)| = \frac{1}{10000}.|H_f(1,-1)|.$$

Como

$$|H_f(1,-1)| \neq 0$$

y en $P_1 = (1,-1)$ tenemos un **máximo** de f entonces debe ser

$$|H_f(1,-1)| > 0$$

y

$$f''_{xx}(1,-1) < 0.$$

Entonces

$$|H_g(1,-1)| > 0$$

y además

$$g''_{xx}(1,-1) > 0.$$

Por lo tanto en el punto $P_1 = (1,-1)$ la función g tiene un **mínimo** con valor

$$g(1,-1) = \frac{1}{10}.$$

Dejamos como un buen entrenamiento la conclusión análoga para el punto $P_2 = (-1,1)$.

Se puede ver una solución on-line clickeando **aquí**.